

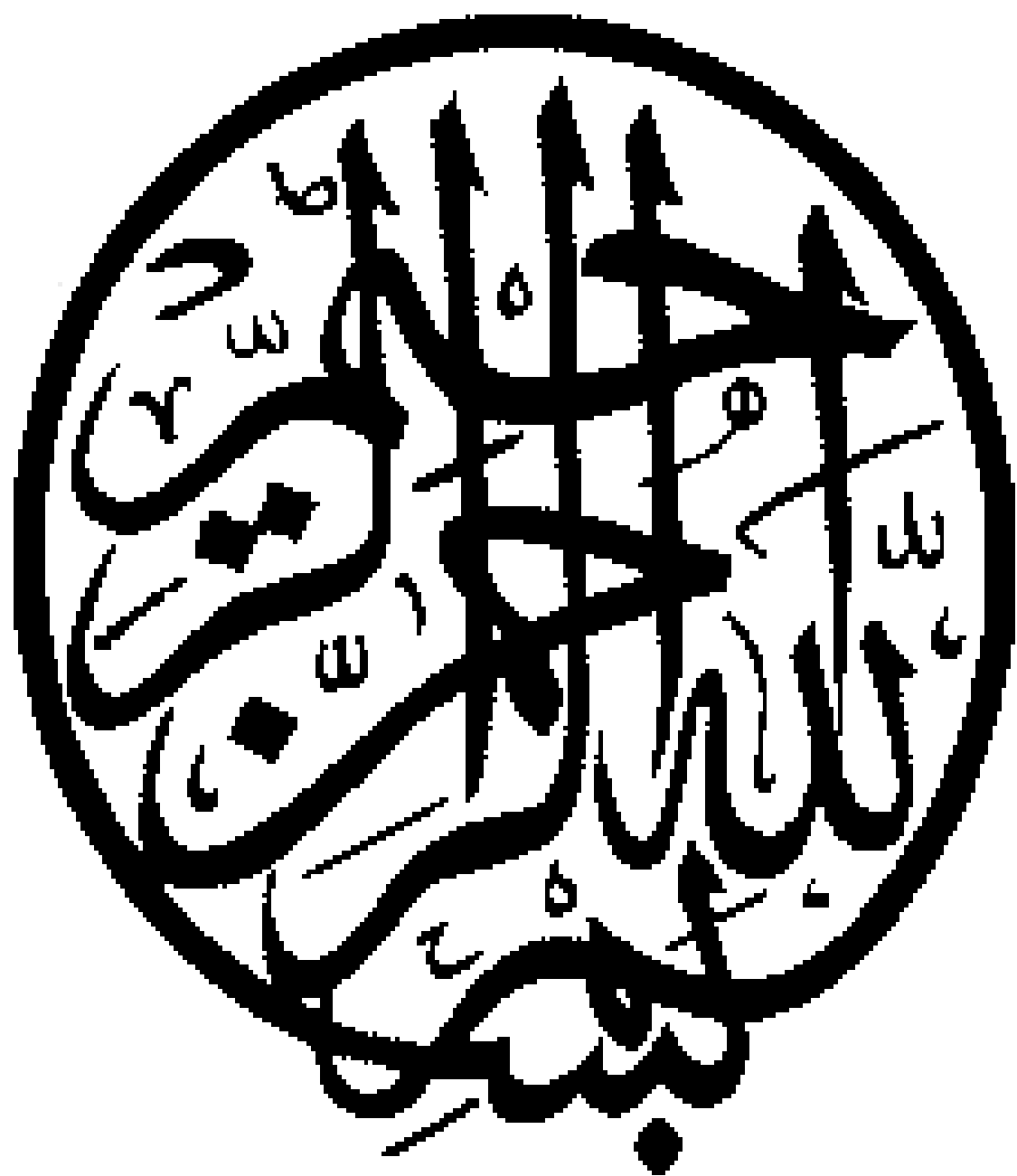


مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پرستان جوان
اداره ی استعداد های درخشان استان اصفهان
دبیرستان استعداد های درخشان شهید بهشتی کاشان (سینانیا) - دوره اول

ریاضی تکمیلی

پایه می ، هشتم

(ویژه ی مدارس استعداد های درخشان استان اصفهان)





فهرست:

صفحه	عنوان
1	فصل یکم اعداد صحیح و گویا
9	فصل دوم اعداد طبیعی
18	فصل سوم چند ضلعی ها
24	فصل چهارم جبر و معادله
38	فصل پنجم بردار مختصات
42	فصل ششم مثلث
54	فصل هفتم توان و جذر
69	فصل هشتم آمار
71	فصل نهم دایره



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان
اداره ی استعداد های درخشان استان اصفهان
دبیرستان استعداد های درخشان شهید بهشتی کاشان (سینان) - دوره اول

ریاضی تکمیلی نینهموشان پایه می هشتم

فصل یکم

اعداد صحیح

و گویا



تمرین

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید دبیرستان استعداد های درخشان شهید بهشتی کاشان (میتابان) - دوره اول

الف) $4^2 - 3^2 + 2^2$

ب) $4^3 + 3^2 - 2 \times 5^2$

ج) $6 \times 2^3 - 7^0 \times 6^2$

د) $(7^2 - 5^2)(6 \times 3^2 + 4) \times 2^0 - 2^5$

ه) $(5^3 - 3^5)(3^2 - 2^3)^4 - 5^4$

و) $(-5 \times 4)^2 \div 2^4 \times (-3)^2$

ز) $(2 - 3^2 \times 5^2 \div 15 - 2^3) \times (7 + 2)$

ح) $(4^3 - 5^2 \times 2)^2 - 8 \div 2^{(3-1 \times 2)} - 4 \times (8 + 3^2)$

ط) $5^2 - (3^2 - 1^3) \times 2^2 \div 4^2$

ی) $((1 \times 2 \div (3 \times 4) - 5) \times 6 - 7) \div (8 \times 9)$



تمرین

۱. عبارات زیر بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارند؟

- الف) $3 - 2\frac{1}{3}$
 ب) $(12 - 3\frac{1}{5}) - 4$
 ج) $\frac{-20}{35} + \frac{-2}{7} - \frac{10}{5}$
 د) $(\frac{3}{8} - \frac{2}{6}) \div (\frac{1}{2\frac{2}{5} + 3\frac{3}{5}})$
 ه) $\frac{\frac{15}{32} \times \frac{13}{4}}{\frac{3}{-8} \times \frac{4}{16}} \div 52$

۲. در هر دسته، حاصل عبارات را به دست آورید:

- | | | |
|--|--|---------------------------------------|
| الف) $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$ | ب) $\frac{8}{5} \div 4$ | دسته‌ی اول: |
| الف) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{6}}$ | ب) $\frac{-\frac{8}{9}}{\frac{2}{-3}}$ | دسته‌ی دوم: |
| الف) $\frac{2}{\frac{3}{4}}$ | ب) $\frac{1}{\frac{5}{-3}}$ | دسته‌ی سوم: |
| الف) $\frac{\frac{8}{2}}{\frac{5}{6}}$ | ب) $\frac{2}{\frac{3}{\frac{4}{5}}}$ | دسته‌ی چهارم: |
| | ج) $\frac{\frac{9}{4}}{\frac{2}{18}}$ | د) $\frac{18}{\frac{2}{\frac{8}{6}}}$ |



۳. بین دو عدد ۹ و ۱۰، سی عدد گویا بنویسید.

۴. اگر $\frac{3}{2} = \frac{1}{x} + \frac{5}{x} + \frac{8}{x} + \frac{13}{x}$ مقدار x را پیدا کنید.

۵. اگر به مخرج کسر $\frac{10}{15}$ عدد ۶ را اضافه کنیم، چه عددی باید به صورت آن اضافه کرد تا مقدار کسر تغییر نکند.

۶. حاصل عبارت زیر تقریباً چند است؟

$$\frac{1023}{2048} + \frac{513}{511} - \frac{301}{900} + \frac{5}{6}$$

۷. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3} \times 1\frac{1}{4} \times \dots \times 1\frac{1}{99} =$

ب) $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right) =$

ج) $\left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{4}\right) \left(1 - \frac{2}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{100}\right) =$

د) $\left(2 - \frac{2}{3}\right) \left(2 - \frac{2}{4}\right) \left(2 - \frac{2}{5}\right) \dots \left(2 - \frac{2}{100}\right) =$



۸. در تساوی زیر مقدار m و n را به دست آورید.

$$\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \dots \times \frac{m}{n} = 3$$

۹. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} =$

ب) $\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{49 \times 51} =$

ج) $\frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \frac{1}{11 \times 14} + \dots + \frac{1}{32 \times 35} =$

د) $\frac{2+4}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4+6}{4 \times 5 \times 6} + \frac{6+8}{6 \times 7 \times 8} + \dots + \frac{18+20}{18 \times 19 \times 20} =$

ه) $\frac{1}{1 \times 6} + \frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \dots + \frac{1}{46 \times 51} =$

و) $\frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{6 \times 9} + \frac{1}{9 \times 12} + \dots + \frac{1}{21 \times 24} =$

ز) $\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{98 \times 100} =$



کسره‌های مصری

در این قسمت هر موقع که نام عدد گویا را می‌آوریم، منظورمان یک عدد گویا بین 0 و 1 است. یکی از جذاب‌ترین و شاید هم پیچیده‌ترین کارهای محاسباتی در ریاضیات، تبدیل کردن یک عدد گویا به کسره‌های مصری است. کاری که مصری‌ها علاقه‌ی زیادی به انجام دادن آن داشتند.

نوشتن یک عدد گویا به صورت کسره‌های مصری، نوشتن آن عدد به صورت مجموعی از کسرهایی است که صورت آن کسرها 1 و مخرج‌شان یک عدد طبیعی است به طوری که مخرج کسرها تکراری نباشند.

این‌که مصری‌ها با چه انگیزه‌ای به محاسبه‌ی این کسرها می‌پرداختند، جای سؤال است.

برای تبدیل کردن یک عدد گویا به کسره‌های مصری، روش‌های فراوانی وجود دارد.

در مثال‌های زیر، هر عدد گویا به صورت کسره‌های مصری نوشته شده است.

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{13} + \frac{1}{156}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

کسر $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ به صورت کسره‌های مصری نوشته نشده است. زیرا از مخرج 8 دوبار استفاده شده

است. امروزه ریاضی‌دانان می‌دانند که هر عدد گویا را می‌توان به صورت کسره‌های مصری نوشت.



تمرین

۱. اعداد زیر را به صورت کسره های مصری بنویسید.

$$\frac{5}{6} =$$

$$\frac{4}{13} =$$

$$\frac{5}{121} =$$

$$\frac{7}{12} =$$

$$\frac{2}{7} =$$

$$\frac{6}{23} =$$

$$\frac{43}{48} =$$

$$\frac{2}{35} =$$

$$\frac{5}{29} =$$

اگر حل تمرین بالا برایتان دشوار است، می توانید «کسره های مصری» را از وبگاه ریاضی بخوانید، تا بتوانید تمرین بالا را به راحتی حل کنید.

۲. اعداد زیر را به صورت کسره های مصری بنویسید.

$$\frac{823}{1024} =$$

$$\frac{400}{729} =$$

$$\frac{371}{512} =$$

$$\frac{73}{81} =$$

$$\frac{59}{64} =$$

$$\frac{13}{27} =$$



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان
اداره ی استعداد های درخشان استان اصفهان
دوستان استعداد های درخشان شهید بهشتی کاشان (میتانان) - دوره اول

ریاضی تکمیلی نهم هوشیار پایه می هشتم

فصل دوم

حساب و

اعداد طبیعی



کاربرد تجزیه

۱. آیا 5×2^9 بر ۸ بخش پذیر است؟
۲. آیا 3×2^9 بر ۹ بخش پذیر است؟
۳. آیا 3×2^9 بر ۶ بخش پذیر است؟
۴. اگر یک عدد طبیعی به ۳ و ۴ بخش پذیر باشد، آیا بر ۱۲ نیز بخش پذیر می‌باشد؟
۵. اگر یک عدد طبیعی به ۶ و ۴ بخش پذیر باشد، آیا بر ۲۴ نیز بخش پذیر است؟
۶. عدد A بر ۳ بخش پذیر نیست، آیا ممکن است پنج برابر آن عدد ($5A$) بر ۳ بخش پذیر باشد؟
۷. عدد A زوج است، آیا $3A$ بر ۶ بخش پذیر است؟

الک اراتستن

۱. وقتی بخواهند دانه‌های گندم را از اضافه‌های آن جدا کنند از الک خاصی استفاده می‌کنند که سوراخ‌های آن با اندازه‌های دانه‌های گندم متناسب باشد. اراتستن، ۲۰۰۰ سال پیش، روش بسیار دقیق و قابل اعتماد خود را ارائه کرد. او روی مضارب ۲ و ۳ و ۵ و ... را خط نمی‌کشید، بلکه آن‌ها را با یک چوب کوچک، سوراخ می‌کرد مثل اینکه عددهای غیر اول را، از سوراخ‌های الک بیرون می‌کرد و تنها عددهای اول را نگاه می‌داشت.
- اژدر که خود را یکی از نوادگان اراتستن معرفی کرده است، معتقد است در روش جدش، رازهایی موجود می‌باشد. او می‌گوید یکی از این رازها مربوط به آخرین عدد اولی است که مضاربش در الک حذف می‌شود. مثلاً در الک اعداد ۱ تا ۸ آخرین عدد اولی که مضاربش خط می‌خورند عدد ۲ می‌باشد. او برای کشف این راز دو جدول زیر را تهیه کرد. جداول اژدر را کامل کنید.



(جدول الف)

۲۵	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱	۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	عدد آخر الک
۵	۴/۹	۴/۸	۴/۷	۴/۶	۴/۵	۴/۳	۴/۲	۴/۱	۴	۳/۸	۳/۷	۳/۶	۳/۴	۳/۳	۳/۱	۳	۲/۸	جذر تقریبی عدد آخر الک
					۳				۳				۳				۲	آخرین عدد اول استفاده شده

(جدول ب)

۱۲۱	۱۰۰	۸۱	۶۴	۴۹	۳۶	۲۵	۱۶	۹	عدد آخر الک
						۵	۴	۳	جذر عدد آخر الک
							۳	۳	آخرین عدد اول استفاده شده

الف) در جدول اول، آخرین عدد اول استفاده شده در چه ستون‌هایی تغییر می‌کند؟

ب) در جدول اول، ستون بعدی که ردیف سوم روی آن تغییر می‌کند چند است؟

پ) در جدول دوم، عدد بعدی که، ستونش هاشور خواهد خورد چه عددی می‌باشد؟

ت) آیا می‌توانید رابطه‌ای میان آخرین عدد اول استفاده شده در الک و عدد آخر الک بیابید؟

۲. قاعده‌ای برای یافتن آخرین عدد اول استفاده شده در الک اعداد ۱ تا n بیابید؟

۳. هژبر و هژبر یک بازی اختراع کرده‌اند. آن‌ها اعداد طبیعی بین ۱ تا ۶۰ را نوشته‌اند و طبق روش الک



اراتستن اعداد غیر اول را به نوبت حذف می‌کنند. هر کس عدد ۴۵ را حذف کند برنده است.

➔ هژیر بازی را شروع می‌کند و ۱ را حذف می‌کند.

➔ هژیر عدد ۴ را حذف می‌کند.

➔ هژیر ۶ را حذف می‌کند و این کار ادامه می‌یابد.

به نظر شما چه کسی برنده است؟

۴. هژیر و هژیر بازی خود را کمی پیشرفته‌تر کرده اند! در بازی جدید باز هم الگ اراتستن اعداد بین ۱

تا ۶۰ استفاده می‌شود اما کسی که آخرین عدد را حذف کند برنده است! به نظر شما کدام عدد

آخرین عدد حذف شده خواهد بود؟ و اگر هژیر بازی را شروع کند چه کسی برنده خواهد شد؟

۵. در بازی بین هژیر و هژیر ۴۱ امین عددی که خط می‌خورد کدام عدد است؟

۶. الگ اراتستن، روش خوب و قابل اعتمادی می‌باشد و برای نیازهای کوچک، همیشه می‌توان از همان

«الگ دستی اراتستن» استفاده کرد. این روش هم در گذر تاریخ به تدریج پیشرفت‌هایی کرده است و

روش جستجوی عددهای اول ساده‌تر شده است. مثلاً یک دانشجو در سال ۱۳۲۳ شمسی و در ایام

جنگ جهانی دوم، یکی از این «الگ»‌های جدید را درست کرده است که آن را بررسی می‌کنیم:



به اعداد زیر دقت کنید. آیا رابطه ای میان اعداد این جدول مشاهده می کنید؟

۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۹	...
۷	۱۲	۱۷	۲۲	۲۷	۳۲	...
۱۰	۱۷	۲۴	۳۱	۳۸	۴۵	...
۱۳	۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	۵۸	...
۱۶	۲۷	۳۸	۴۹	۶۰	۷۱	...
۱۹	۳۲	۴۵	۵۸	۷۱	۸۴	...

اگر عددی مثل n در این جدول وجود داشته باشد، عدد $2n+1$ غیر اول است، و اگر عدد n در جدول وجود نداشته باشد $2n+1$ عددی است اول.

مثلاً:

(۱) در جدول عدد $n=3$ وجود ندارد، بنابراین $2n+1=7$ عدد اول است.

(۲) در جدول عدد $n=5$ وجود ندارد، بنابراین $2n+1=11$ عدد اول است.

(۳) عدد $n=6$ هم در جدول نیست، بنابراین $2n+1=13$ عدد اول است.

(۴) در جدول عدد $n=7$ وجود دارد، بنابراین $2n+1=15$ عددی است غیر اول و غیره.

اگر اعدادی را که در این جدول نیستند را دو برابر کرده با یک جمع کنیم، می توانیم تمام اعداد اول را به دست آوریم. با این روش ۳۰ عدد اول به دست آورید.



کاربرد اعداد اول

۱- آیا اعداد زیر اول هستند؟ چرا؟

الف) $۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۶۰۳$

ب) ۲۰۰۹

پ) $(۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times ۲۰) + ۱۷$

ت) $۲^{۵۰} + ۱$

ث) $۳^{۱۷} + ۱$

۲- چنگیز دانش آموز سوم راهنمایی است. او می‌داند که اعداد اول کاربردهای بسیاری دارند. او در یک وب‌گاه معتبر خوانده است که ارتش‌های کشورهای مختلف از اعداد اول برای رمزنگاری استفاده می‌کنند و هر کشوری که عدد اول بزرگتری در اختیار داشته باشد که دیگر کشورها هنوز از آن مطلع نباشند دارای قدرت فوق‌العاده‌ای در رمز کردن اطلاعات خود خواهد بود. او در این وب‌گاه همچنین خواند که اعداد اول بزرگ قیمت زیادی دارند و می‌توان آن‌ها را فروخت.

چنگیز بعد از خواندن این مطلب شروع به یافتن بزرگ‌ترین عدد اول کرد. او می‌خواهد عدد اولی از کنار هم قرار دادن اعداد اول متوالی به دست آورد مثلاً $۲۳ \times ۱۹ \times ۱۷ \times ۱۱ \times ۷ \times ۵ \times ۲۳$. اما او می‌داند برای هر کشفی باید پله پله و آرام آرام حرکت کند. چنگیز در حالی که زیر لب زمزمه می‌کرد: «رهرو آن



نیست که گه تند و گهی خسته رود ، رهرو آنست که آهسته و پیوسته رود» کار جستجوی خود را

با عدد ۲۳۵۷ شروع کرد. آیا عدد ۲۳۵۷ اول است؟ ۲۳۵۷۱۱ چطور؟

۳- چنگیز این بار می‌خواهد از جمع چند عدد مربعی یک عدد اول بیابد. به همین دلیل جدولی مانند زیر

درست کرده است. جدول چنگیز را کامل کنید و درباره‌ی اول یا مرکب بودن این مجموع در حالت

کلی $۱^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ تصمیم بگیرید؟

عدد	حاصل		اول است یا مرکب
$1^2 + 2^2$	۵	$\frac{2 \times (2+1) \times (2 \times 2 + 1)}{6}$	اول است.
$1^2 + 2^2 + 3^2$	۱۴	$\frac{3 \times (3+1) \times (2 \times 3 + 1)}{6}$	مرکب است.
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$		$\frac{4 \times (4+1) \times (2 \times 4 + 1)}{6}$	
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$			
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 6^2$			
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 7^2$			
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$			



۴- روح‌انگیز نیز به دنبال یک عدد اول است. او می‌خواهد ۵ عدد متوالی بیابد که مجموع آن‌ها اول باشد.

او جدولی مانند جدول زیر رسم کرده است. به او در پر کردن جدول کمک کنید. آیا او موفق به

یافتن این ۵ عدد می‌شود؟

اعداد	حاصل	اول یا مرکب
$1+2+3+4+5$	۱۵	مرکب
$2+3+4+5+6$		
$3+4+5+6+7$		
$4+5+6+7+8$		
$5+6+7+8+9$		
$6+7+8+9+10$		
$7+8+9+10+11$		

فرمول‌هایی برای اعداد اول

۱- برای کشف رازهای اعداد اول در طول تاریخ سعی و تلاش‌های بسیاری شده است. بسیاری از

ریاضی‌دانان به دنبال یافتن رابطه‌ای میان اعداد اول بوده‌اند و فرمول‌های بسیاری در این زمینه تولید

شده‌اند یکی از این فرمول‌های جالب، مربوط به اویلر ریاضیدان معروف سوئیس می‌باشد.



فرمول اویلر: ای فرزندی، راز یافتن یک عدد اول اینک پیش روی توست. یک عدد طبیعی انتخاب کن. آن را با مربعش و عدد ۴۱ جمع کن. حاصل این مجموع حتماً عددی اول است.

جدولی مانند زیر تشکیل داده و فرمول اویلر را برای اعداد ۱ تا ۲۰ بررسی کنید.

عدد	فرمول اویلر	حاصل	اول است؟
۱	$1 + 1^2 + 41$	۴۳	✓
۲	$2 + 2^2 + 41$	۴۷	✓
۳	$3 + 3^2 + 41$	۵۳	✓
۴	$4 + 4^2 + 41$	۶۱	✓
۲۰	$20 + 20^2 + 41$	۴۶۱	

۲- مارتین مرسن (۱۰۲۷-۹۶۷ هجری شمسی) یک کشیش ریاضی کار بود. این ریاضی کار فرانسوی نیز

علاقه ی زیادی به اعداد اول داشت. او ادعا کرد که «تمام اعداد به شکل $2^p - 1$ اگر p یک عدد اول

باشد» عدد اول می باشند. ادعای مرسن را برای اعداد مختلف بررسی کنید.

۳- «مرادخان» روزهای بسیاری صرف کشف رازهای اعداد اول کرد و این کار را آنقدر ادامه داد تا

اینکه خسته و منصرف شد. او برای فراموش کردن اعداد اول به تازگی شروع به نواختن ویولن کرده

است. او مجموعه ای از نت های کوتاه و کشیده را می نوازد که می توان آن ها را با صفر (نت های



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پروران جوان
اداره می استعداد های درخشان استان اصفهان
دبیرستان استعداد های درخشان شهید بهشتی کاشان (سینان) - دوره اول

ریاضی تکمیلی نینهموشان پایه می هشتم

فصل سوم

چند ضلعی ها



تمرین

۱. الف) یک شکل رسم کنید که ۷ محور تقارن داشته باشد.
- ب) آیا شکلی وجود دارد که 100° محور تقارن داشته باشد؟
- ج) آیا شکلی وجود دارد که 101° محور تقارن داشته باشد؟
۲. الف) آیا یک ۵ ضلعی وجود دارد که مرکز تقارن داشته باشد؟
- ب) آیا یک ۶ ضلعی وجود دارد که مرکز تقارن داشته باشد؟
- ج) به جای اعداد ۵ و ۶ چه اعدادی می‌توان قرار داد تا پاسخ مثبت باشد.
۳. به چند حالت می‌توان مثلثی رسم کرد که فقط یک محور تقارن داشته باشد به طوری که یکی از زاویه‌های آن 30° درجه و ضلع مجاور به آن زاویه ۳ سانتی‌متر باشد. تمام حالت‌های ممکن را رسم کنید.
۴. به چند حالت می‌توان یک چهارضلعی رسم کرد به طوری که فقط دو محور تقارن داشته باشد و اندازه‌ی یک زاویه‌ی آن 30° درجه و ضلع مجاور به آن زاویه ۳ سانتی‌متر باشد. تمام حالت‌های ممکن را رسم کنید.
۵. الف) آیا می‌توان یک مثلث رسم کرد که دقیقاً ۳ محور تقارن داشته باشد؟
- ب) آیا می‌توان یک چهارضلعی رسم کرد که دقیقاً ۳ محور تقارن داشته باشد؟
۶. نشان دهید اگر یک متوازی‌الاضلاع محور تقارن داشته باشد، آن متوازی‌الاضلاع یا مستطیل است یا لوزی و یا مربع.
۷. آیا غیر از مربع، چهارضلعی وجود دارد که دقیقاً چهار محور تقارن داشته باشد؟



۸. آیا می‌توان بر روی صفحه‌ی کاغذ شکلی رسم کرد که:

(الف) دو محور تقارن موازی داشته باشد.

(ب) دو مرکز تقارن داشته باشد.

۹. می‌دانیم قرینه‌ی یک مثلث نسبت به یکی از اضلاع آن به همراه خود آن مثلث، تشکیل یک مربع می‌دهند. آن مثلث را توصیف کنید.

۱۰. آیا می‌توانید چهارضلعی بیابید که محور تقارن داشته باشد، ولی مرکز تقارن نداشته باشد؟

۱۱. یک چهارضلعی داریم که محور تقارن آن، یکی از قطرهای چهارضلعی است. زاویه‌ی بین قطرهای این چهارضلعی چند درجه است؟

۱۲. آیا می‌توانید بر روی صفحه‌ی کاغذ، شکلی غیر از دایره رسم کنید که بی‌شمار محور تقارن داشته باشد.

۱۳. آیا اگر شکلی دقیقاً دو محور تقارن داشته باشد، آن دو محور برهم عمودند؟ برای ادعای خود دلیل بیاورید.

۱۴. آیا شکلی وجود دارد که زاویه‌ی بین دو محور تقارن متوالی آن ۱۱ درجه باشد؟

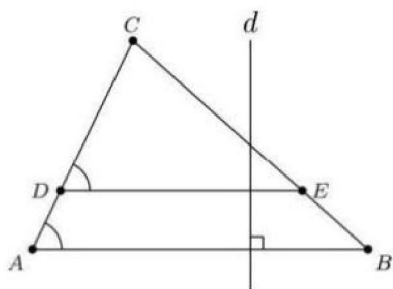
۱۵. آیا می‌توانید شکلی بیابید که فقط دو محور تقارن داشته باشد؛ ولی مرکز تقارن نداشته باشد؟

۱۶. شکلی را معرفی کنید که دقیقاً دارای ۱۱۵ محور تقارن باشد. کمترین زاویه‌ی بین دو محور تقارن از این شکل چقدر است؟



تمرین

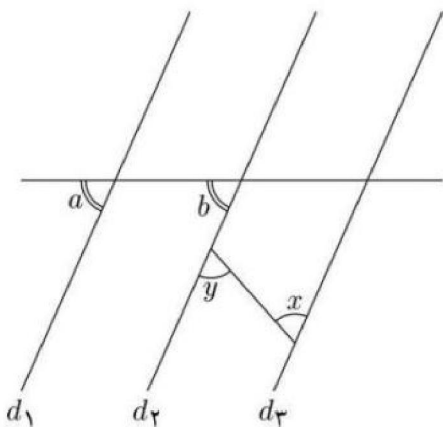
۱. در شکل زیر $\widehat{CDE} = \widehat{A}$ و $d \perp AB$ ؛ ثابت کنید $d \perp DE$.



۲. در چهار ضلعی $ABCD$ زاویه‌های \widehat{A} ، \widehat{B} و \widehat{C} قائمه هستند؛ ثابت کنید AD بر CD عمود است.



۳. در شکل زیر $\widehat{x} = \widehat{y}$ و همچنین $\widehat{a} = \widehat{b}$ ؛ ثابت کنید $d_1 \parallel d_3$.

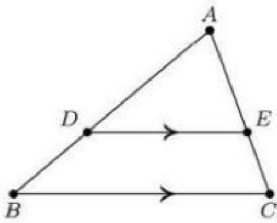




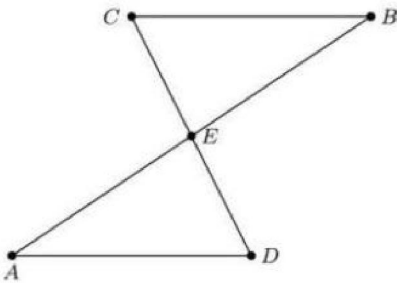
تمرین

۱. ثابت کنید اگر خطی به موازات قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقینی رسم شود و دوساق آن را در دو نقطه‌ی دیگر قطع کند، یک مثلث متساوی‌الساقین دیگر تشکیل می‌شود.

۲. در شکل زیر $AB = BC$ و $BC \parallel DE$ ؛ ثابت کنید $AD = DE$.

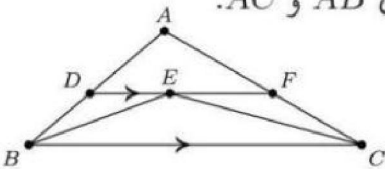


۳. در شکل زیر اگر $AD = CB$ و همچنین $AD \parallel CB$ ، ثابت کنید AB و CD یکدیگر را در E نصف می‌کنند.

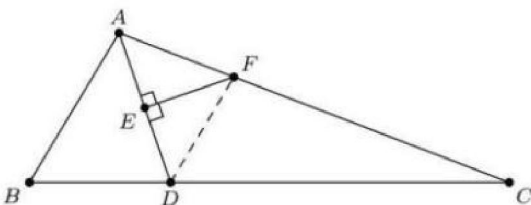


۴. با همان شرایط سؤال قبل، ثابت کنید $AC \parallel DB$.

۵. مطابق شکل، در مثلث $\triangle ABC$ ، BE نیمساز \hat{B} ، CE نیمساز \hat{C} و DF با BC موازی است. ثابت کنید محیط مثلث $\triangle ADF$ برابر است با مجموع اندازه‌ی طول ضلع‌های AB و AC .



۶. مطابق شکل، در مثلث $\triangle ABC$ ، AD نیمساز \hat{A} و همچنین EF عمود منصف AD است؛ ثابت کنید $DF \parallel AB$.





مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان
اداره‌ی استعدادهای درخشان استان اصفهان
دبیرستان استعدادهای درخشان شهید بهشتی کاشان (سینان) - دوره اول

ریاضی تکمیلی نهم درخشان پایه می، هشتم

فصل چهارم

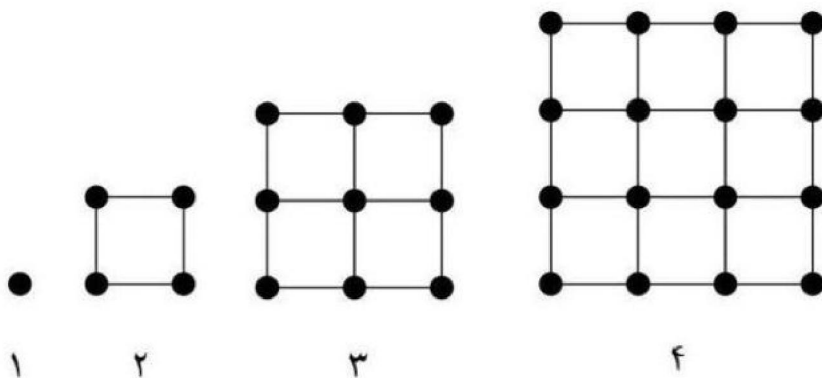
جبر و معادله



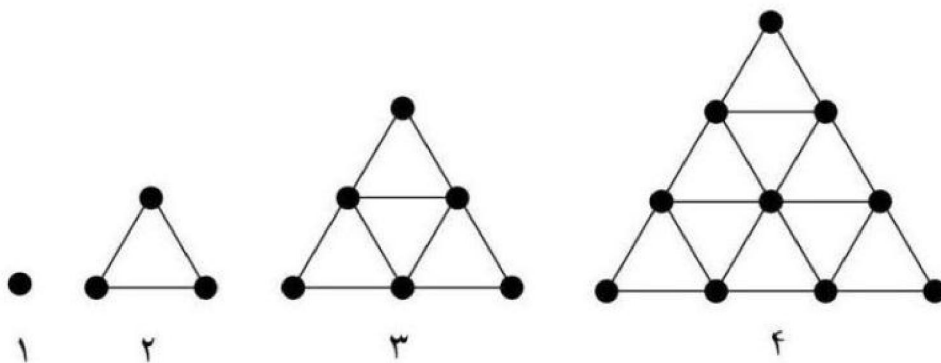
عبارت‌های جبری - یافتن جمله n ام

۱. در ریاضیات بعضی دنباله‌ها بسیار معروف می‌باشند. در زیر چند دنباله‌ی شکلی آمده است. در این شکل‌ها تعداد دایره‌های سیاه موجود در شکل با شماره‌ی آن رابطه‌ای دارند. در مورد هر دنباله ابتدا شکل بعدی را رسم کرده و سپس تعداد دایره‌های سیاه n امین شکل را با یک رابطه‌ی جبری بیان کنید.

الف) اعداد مربعی

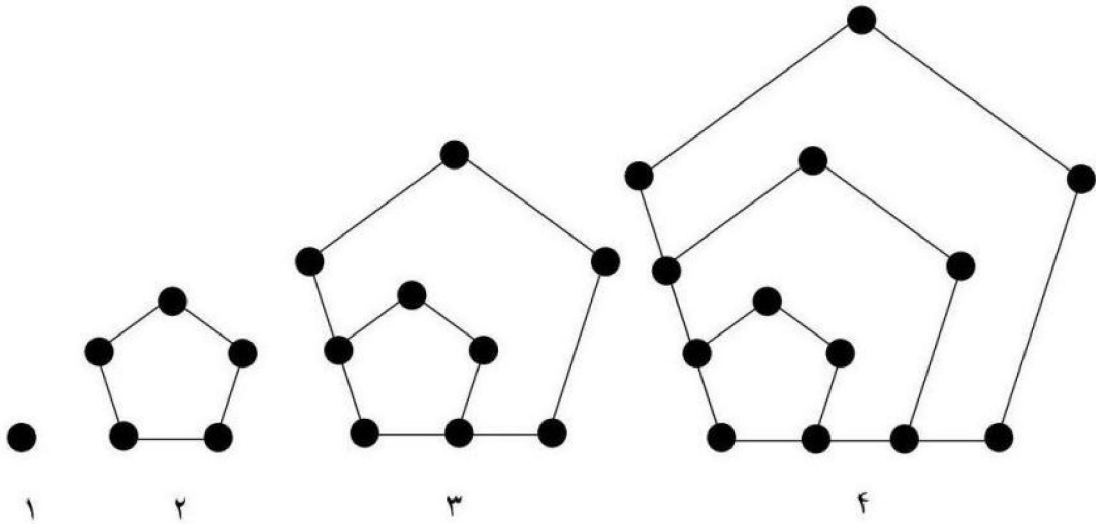


ب) اعداد مثلثی

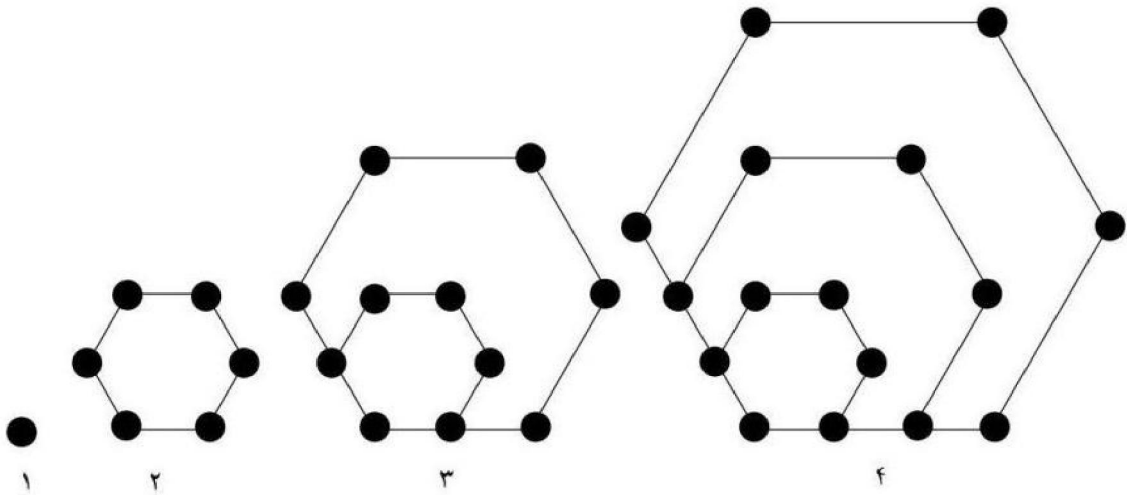




پ) اعداد مُخَمَّسی



ت) اعداد مُسَدَّسی





۲. «لیندا» با جمع و تفریق بعضی دنباله‌های بالا، دنباله‌های جدیدی به دست آورده است. مثلاً با جمع کردن دو دنباله‌ی اول (اعداد مربعی و مثلثی) دنباله‌ی

$$۲, ۷, ۱۵, ۲۶, ۴۰, \dots$$

را ساخته است. جمله n ام هر یک دنباله‌های لیندا را بیابید.

الف) $۲, ۷, ۱۵, ۲۶, ۴۰, \dots$

ب) $۲, ۸, ۱۵, ۲۳, ۳۲, \dots$

پ) $۲, ۱۰, ۲۰, ۳۲, ۴۶, \dots$

ت) $۲, ۹, ۱۸, ۲۹, ۴۲, \dots$

ث) $۲, ۱۱, ۲۰, ۲۹, ۳۸, \dots$

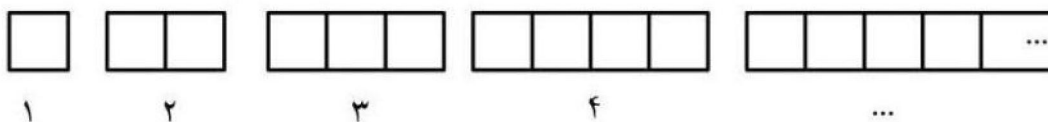
ج) $۳, ۱۴, ۲۶, ۳۹, ۵۳, \dots$

۳. نشان دهید جمع هر دو عدد مثلثی متوالی، یک عدد مربعی است.

۴. آقای «ترنم» معلم ریاضی سال سوم راهنمایی است. او روی تخته‌ی کلاس با چوب-

کبریت دنباله‌ی شکلی زیر را رسم کرد و از دانش‌آموزان خواست تعداد چوب کبریت-

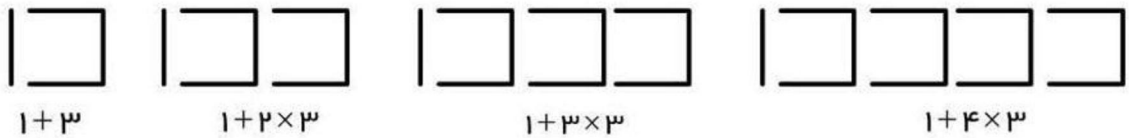
های n امین شکل را بیابند.



هر یک از دانش‌آموزان یک روش را برای شمارش تعداد چوب کبریت‌های هر شکل پیشنهاد کردند.



الف) «تفکر» گفت می‌توانیم تعداد چوب کبریت‌های هر شکل را بدین صورت بشماریم:



با روش تفکر، جمله n ام این دنباله را بیابید.

ب) «تحول» دوست تفکر نوشت:

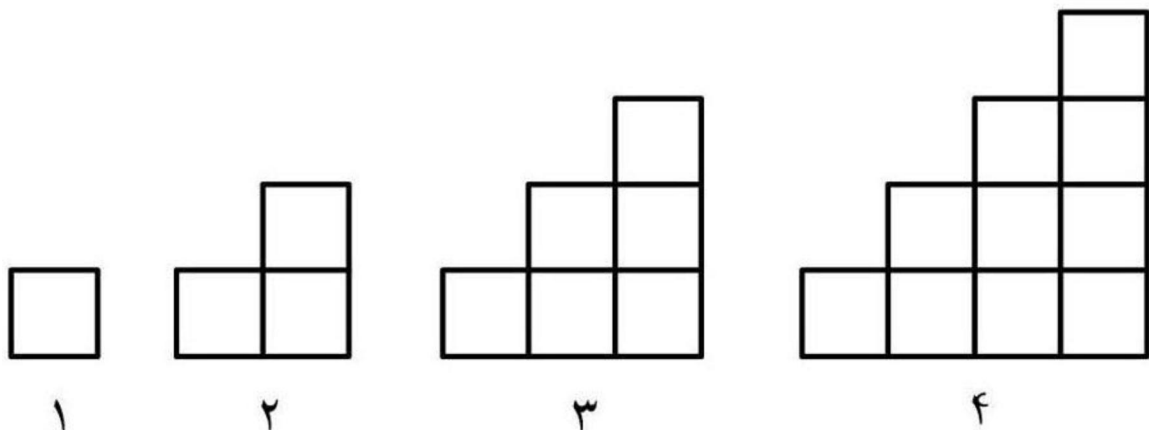
$$1 \times 4 - 0, \quad 2 \times 4 - 1, \quad 3 \times 4 - 2, \quad 4 \times 4 - 3, \quad 5 \times 4 - 4, \quad \dots$$

تحول چگونه چوب کبریت‌ها را شمرده است.

پ) جمله n ام این دنباله به روش تحول به دست آورید.

ت) «تصوّر» شاگرد اول کلاس، جمله $pn + (n + 1)$ را پیشنهاد کرده است. او چگونه چوب کبریت‌ها را شمرده است.

۵. در دنباله‌ی شکلی زیر که با چوب کبریت می‌توان آن را نشان داد:



الف) تعداد مربع‌های 1×1 شکل n ام چندتا است؟

ب) تعداد چوب کبریت‌های شکل n ام را بیابید.



تمرین

۱. کدام یک از جملات زیر با هم متشابه اند؟

$$6x, 6xy, 8x, 3, 4xy^2, -2xy, -100, 15xy^2$$

$$3x^2y, 19x, -xy, x, 9y, 2y, 16xy, 0$$

۲. عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $18x + 10y - 8x + y - 3x$

ب) $94x + 13xy - 44x - 9xy + 8y$

ج) $\frac{3}{y}x - \frac{3}{y}y - \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y$

د) $8(a - 2y) + 4(4y - 2a)$

ه) $3(x - 2z) - (8x - 4z) - 3(x - 2z)$

و) $9(x - x^2 + 1) + 6x(2x - 4) + 16$

ز) $8x + \frac{6x^2}{x} - 2x^2 \left(\frac{5}{x} + \frac{2x^2}{x^3} \right) \quad x \neq 0$

ح) $\frac{8a^6b^9x^2}{2a^3b^8x^2} + \frac{12a^3b^5y^2}{3b^4y^2} \quad a, b, x, y \neq 0$

۳. جاهای خالی را به طور مناسب پر کنید.

الف) $12m + \underline{\hspace{2cm}} - 3k + \underline{\hspace{2cm}} = 3m + 3k$

ب) $6(2x + \underline{\hspace{2cm}}) - 2(\underline{\hspace{2cm}} + 3y) = 6x + 6y$



۴. یک عدد در نظر بگیرید. ۱۱ واحد به آن اضافه کنید. مجموع را در ۲ ضرب کنید و از حاصل ضرب ۲۰ واحد کم کنید. آنچه را که به دست آمده در ۵ ضرب کنید و از حاصل ضرب، ۱۰ برابر عددی که در ابتدا در نظر گرفته بودید، کم کنید. حاصل برابر ۱۰ خواهد شد.

با استفاده از رابطه‌های جبری توضیح دهید که چرا همیشه به عدد ۱۰ می‌رسید.

۵. سه رقم انتخاب کنید به طوری که همگی مخالف صفر باشند. با این سه رقم شش عدد دو رقمی مختلف درست کنید. مجموع این عددهای دو رقمی را بر مجموع سه رقم انتخابی تقسیم کنید. حاصل برابر ۲۲ خواهد شد.

با استفاده از رابطه‌های جبری توضیح دهید که چرا همیشه به عدد ۲۲ می‌رسید.

ساده کردن عبارتهای جبری

۱. در هر یک از عبارات، زیر جملات متشابه خط بکشید و سپس آنها را ساده کنید.

$$(\pi = 3/1415\dots)$$

الف) $\pi a + 3a + \pi^2 a =$

ب) $3a + \pi^2 a - 2a + 4\sqrt{2} \times a =$

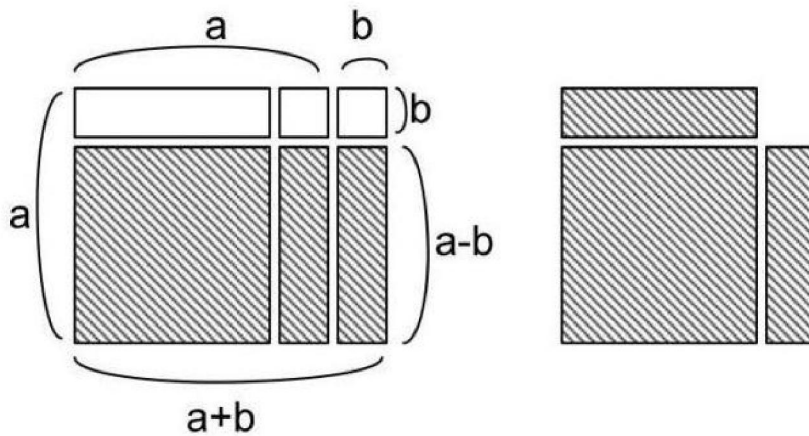
پ) $\sqrt{3}a^2b + \sqrt{2}ab^2 - \pi^2 ab^2 - \sqrt{6}a^2b =$

ت) $\sqrt{2}s^2b + \sqrt{3}b^2s - 2\sqrt{2}sb^2 - \sqrt{32}s^2b =$

ث) $\sqrt{2}\sqrt{p}^2m + \pi^3 pm^2 - \pi^2 pm^2 - \sqrt{3}p^2m =$



۲. با توجه به شکل به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) $(a+b)(a-b) =$

ب) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3}) =$

پ) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{1388} (\sqrt{5} - \sqrt{2})^{1388} =$

ت) $1999 \times 2001 =$

ث) $6002 \times 5998 =$

۳. عبارت $\frac{1}{\sqrt{12} - \sqrt{11}}$ را در نظر بگیرید.

الف) این عبارت را در $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{11}}{\sqrt{12} + \sqrt{11}}$ ضرب کنید. آیا عبارت ساده‌تر نشده است؟

ب) عبارت $\frac{1}{\sqrt{2009} - \sqrt{1388}}$ را ساده کنید.



معادله

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{4(3x-6)+12}{5x^2-3x-1} = 0$

ب) $3x - 2(x^2 - 3x + 1) = (-2x + 1)(x - 5)$

پ) $\frac{-(2x-3)(x^2-13)}{9-5x^2} = 0$

ت) $\frac{\frac{4x-8}{10} - \frac{20-x}{4} + \frac{x+\frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{6}}{\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} - x + 17} = \frac{0}{17}$

ث) $x^2(x^2+8) = 0$

ج) $(2x-3y+5)^{20} + (3x-6)^{32} + (z-2y)^8 = 0$

چ) $\frac{(x^2-8)^{20} (x^4-16)^{40} (x^3+125)^{50} ((2x-6)^2+9) ((2x+3)^2-(x+3)^2) (x^{11}-1)^{10}}{(x^3+27)^4 (x^{10}+1)^{14} (x^4-625)(x^5-32)^8 \left(\frac{x}{3}-84\right)^8} = 0$

ح) $\frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2}$

خ) $\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^2+x}$

د) $5^{x+1} + 5^{x-1} = 130$

ذ) $3^{x-2} = 5^{6-3x}$

ر) $\sqrt{2^x \times 3^{y+1}} = 72$

ز) $3^x \times 42 + 3^{x-1} \times 27 = 459$



کاربرد معادله

۱. تاجری مبلغی پول داشت، در سال اول صد میلیون خرج کرد و یک سوم آنچه که برایش باقیمانده بود به پولش اضافه شد. در سال بعد دوباره صد میلیون خرج کرد و یک سوم باقیمانده‌ی پولش به آنچه داشت اضافه شد. در سال سوم باز هم صد میلیون خرج کرد و بعد وقتی یک سوم دارایی حال حاضرش را به پولی که داشت اضافه کرد دید که دوبرابر سرمایه‌ی اولیه‌اش پول دارد. سرمایه‌ی اولیه‌ی این تاجر چقدر است؟
۲. درباره‌ی شرح حال «دیوفانت» ریاضی‌دان مشهور باستان، اطلاعات خیلی کمی داریم. همه آنچه درباره‌ی او می‌دانیم از نوشته‌ای بر روی کتیبه‌ی مقبره‌اش به دست آمده است: رهگذر! در اینجا دیوفانت خوابیده است. زندگی پرماجرایی او به این ترتیب است. یک‌ششم عمرش دوران خوش زندگی کودکی او بود. یک‌دوازدهم دیگر عمرش هم در وضعی گذشت که در حال تحصیل علوم ابتدایی بود. یک‌هفتم عمر دیوفانت در زندگی زناشویی ولی بدون بچه گذشت. بعد از ۵ سال با تولد اولین پسر زیبایش، خوشبختی به او رو کرد. ولی تقدیر چنین بود که فقط نیمی از عمرش پدرش را خوشبخت و روشن کند. بالاخره در چهارسال آخر عمرش با اندوه عمیقی زندگی کرد، زیرا که پسرش را از دست داده بود.



حالا بگویید وقتی که مرگ زندگی دیوفانت را درهم نوردید، چند سال داشت؟

۳. چند سیب لازم است تا چهار نفر از بین شش نفر به ترتیب یک سوم، یک هشتم، یک چهارم و یک پنجم تعداد کل آن‌ها را دریافت کنند و پنجمی ده سیب داشته باشد و یک سیب هم برای نفر ششم باقی بماند؟



۴. چهار شریک به نام‌های رها، راحله، الهه، الهام روی هم ۴۵ میلیون پول داشتند. اگر به پول رها ۲ میلیون اضافه کنیم، از پول راحله ۲ میلیون کم کنیم، پول الهه را دو برابر و پول الهام را نصف کنیم، پول هر چهار نفر مساوی می‌شود. هر کدام چقدر پول به اشتراک گذاشته‌اند.

۵. سه شکارچی، چند روز متوالی را در جنگل برای شکار گذرانند. صبح روز آخر، حادثه‌ی ناگواری پیش آمد. وقتی که آن‌ها پیاده از جوی آب می‌گذشتند، دو شکارچی در آب افتادند و فشنگ‌دان‌هایشان خیس شد و مقداری از فشنگ‌هایشان بی‌مصرف شد. سه دوست، فشنگ‌هایی را که برایشان باقی مانده بود، به طور مساوی بین خودشان تقسیم کردند. بعد از آن، هر یک از شکارچی‌ها ۴ تیر در کردند و برای همه‌ی آن‌ها روی هم همان قدر فشنگ باقی ماند که هر یک، بعد از تقسیم فشنگ‌ها داشتند. در موقع تقسیم، روی هم چقدر فشنگ داشتند.

۶. به مکالمه‌ی زیر بین «دکتر کاظم» و «حسین» توجه کنید و فاصله‌ی بین خانه آن‌ها را محاسبه کنید.

دکتر کاظم به یکی از آشنایانش به نام حسین گفت: فردا پیش من بیا!
- از شما متشکرم. من ساعت ۳ از منزل خارج می‌شود، ولی اگر شما تصمیم به گردش داشته باشید، می‌توانید در همین ساعت از منزل حرکت کنید تا در نیمه‌ی راه به هم برسیم و ادامه مسیر را با هم باشیم.



- ولی فراموش نکنید که سن من زیاد است و ساعتی بیش از ۳ کیلومتر نمی‌توانم راه بروم. ولی شما جوانید و اگر با قدم‌های آهسته هم راه بروید در هر ساعت ۴ کیلومتر می‌شود. عیبی ندارد اگر به هم کمی تخفیف بدهید ممنون می‌شوم.
- حق با شماست! چون من ساعتی یک کیلومتر بیشتر از شما راه می‌روم، این یک کیلومتر را به شما می‌دهم یعنی یک ربع زودتر از شما حرکت می‌کنم، به نظر شما کافی است؟

دکتر موافقت کرد و گفت: از محبت شما متشکرم. حسین همین کار را کرد. او یک ربع به ۳ از منزل خارج شد و با سرعت ۴ کیلومتر در ساعت به راه افتاد و دکتر هم درست ساعت ۳ از منزلش خارج شد و با سرعت ۳ کیلومتر در ساعت به راه افتاد. وقتی به هم رسیدند، پیرمرد (دکتر کاظم) برگشت و با مرد جوان به طرف منزل خود قدم زدند. مرد جوان (حسین) وقتی به منزل خود بازگشت، پیش خود حساب کرد و دید که به خاطر تخفیف یک ربع ساعت، در مجموع درست چهار برابر دکتر راه رفته است.

۷. در کتیبه‌هایی که از قومی مربوط به قرون ابتدایی به دست آمده است نوشته شده بود:

$$۸ \times ۸ = ۷۱، \text{ به نظر شما این قوم بدوی، مقدار } ۸ \times ۵ \text{ را چه عددی می‌دانسته‌اند؟}$$

در یک مسابقه‌ی تلویزیونی، مجری به شرکت‌کننده‌ای که به مرحله‌ی کشف رمز گاوصندوق حاوی صدمیلیون تومان رسیده بود راهنمایی به صورت زیر کرد:

رمز سه‌رقمی این گاوصندوق دارای خصوصیات زیر است:



رقم دهگان آن مساوی ۷، رقم صدگان آن ۴ واحد کمتر از یکان آن است و اگر ارقام عدد را به ترتیب عکس بنویسیم، عدد حاصل ۳۹۶ واحد از عدد مجهول بزرگتر می شود.

آیا مجری با شرکت کننده فامیل بوده است!؟

۸. مرد بیکاری به نام «حسن کچل» این طرف آن طرف می رفت و بدون این که به فکر کار و تلاش باشد، دائماً از بی پولی خود گله می کرد. به هر کس می رسید، درد دلش باز می شد و از این که نمی تواند پولدار شود و زندگی راحتی داشته باشد، آه و ناله می کرد. کلاهبرداری تصمیم گرفت از طمع حسن استفاده کند. پیش او آمد و از موجودیش پرسید. وقتی که از موجودی حسن بیکاره آگاه شد، به او گفت:

- من راه حل ساده و خوبی برای پولدار شدن تو دارم.

- چطور؟

- در خارج این شهر پلی بر روی رودخانه است، تو هر بار که از پل عبور کنی، من پولت را دوبرابر خواهم کرد.

- تو چرا پولت را مجانی به من می دهی؟

- من بابت این کار از تو دستمزدی خواهم گرفت.

- چقدر؟

- هر بار که پول تو را دوبرابر کردم، ۲۴ هزار تومان بابت دستمزد به من پرداخت می کنی.

- همین!

- بله. همین!



بعد از قول و قرار، به بیرون شهر رفتند، حسن کچل بیکارِ طمع کار از پل گذشت و مرد حيله گر خبيث حقه‌باز پول او را دوبرابر کرد و بعد ۲۴ هزار تومان دستمزد از او گرفت. حسن دوباره از پل گذشت و باز هم پولش دوبرابر شد و مبلغ دستمزد را پرداخت. برای سومین بار عمل تکرار شد، ولی وقتی که این بار حسن بعد دوبرابر شدن پولش دستمزد کلاه‌بردار را پرداخت، دیگر چیزی برایش نمانده بود که برای دوبرابر کردن آن از پل عبور کند. طمع حسن کچل، تمام پولش را بر باد داده بود. موجودی حسن در ابتدا چقدر بوده است؟





مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

اداره‌ی استعدادهای درخشان استان اصفهان

دبیرستان استعدادهای درخشان شهید بهشتی کاشان (سینان) - دوره اول

کتابخانه تخصصی پژوهشگران پایه‌ی هشتم

فصل پنجم

بردار مختصات

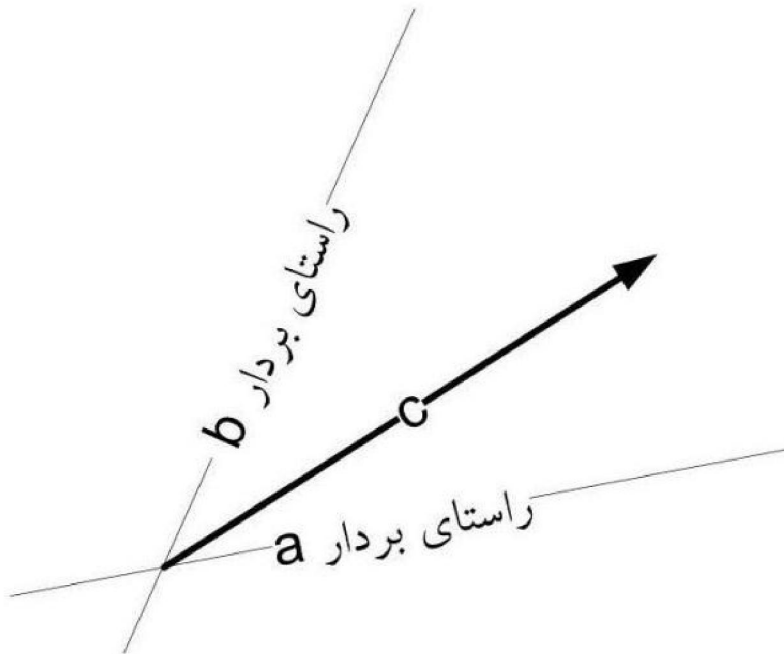


کاربرد بردارها

۱. در تمام علوم، دو نوع کمیت وجود دارد. کمیت‌های عددی مثل قد و کمیت‌های برداری مثل نیرو. چه تفاوت‌هایی بین این دو نوع کمیت می‌بینید؟
۲. سرعت یک خودرو چه نوع کمیتی است؟ جرم یک خودرو چگونه؟
۳. دو خودروی سواری با سرعت‌های ۲۰ و ۳۰ کیلومتر در ساعت در جاده کاشان - اصفهان در حال حرکت هستند. اگر این دو خودرو در یک لحظه در کنار هم باشند، بعد از گذشت ۲ ساعت در چه فاصله‌ای از یکدیگر قرار دارند؟



۲. بردار \vec{c} رسم شده است و می دانیم که $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. راستاهای دو بردار \vec{a} و \vec{b} داده شده اند. بردارهای \vec{a} و \vec{b} را رسم کنید و روش رسم خود را توضیح دهید.



۳. تینا، ۴۰ کیلوگرم وزن دارد. او دیروز که به همراه خانواده اش به دل طبیعت رفته بود طنابی را به شاخه ی قطور یک درخت وصل کرد و مشغول تاب بازی شد. طناب هایی که او استفاده کرده است، می بایست توانایی تحمل حداقل چند کیلوگرم وزن را داشته باشند تا تینا دچار مشکل نشود؟

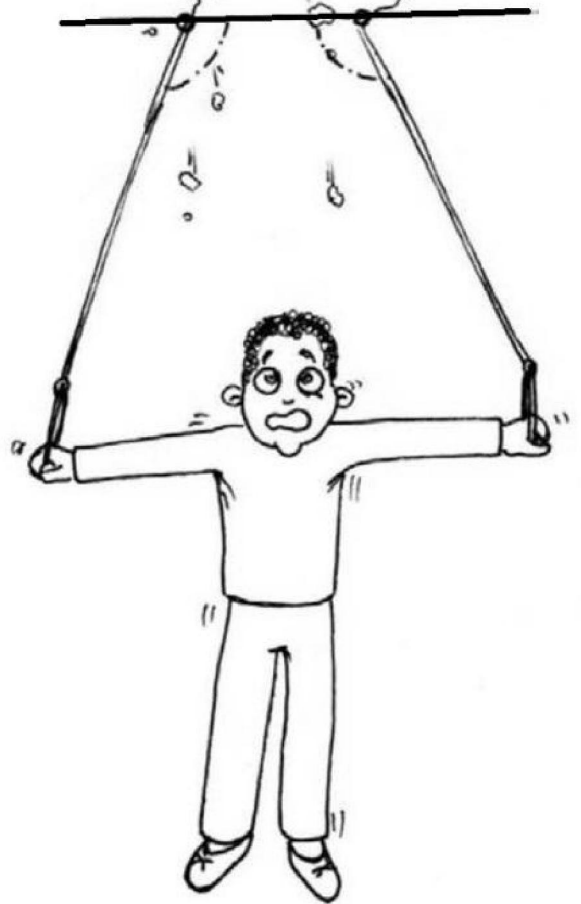


۴. تابک برادر تینا، یک ژیمناست نوجوان است. او خود را برای شرکت در مسابقات ژیمناستیک استان در دسته ۵۰ کیلوگرم آماده می‌کند. اتابک در بخش دارحلقه بسیار توانمند است. اما دیروز که همه‌ی خانواده برای گردش به دل طبیعت رفتند او در خانه برای تمرین بیشتر تنها ماند. او ابتدا مثل هر روز به دارحلقه‌ای که خودش ساخته بود آویزان شد (شکل ۱). پس از مدتی به سراغ یک حرکت جدید تعادلی رفت (شکل ۲). اگر طناب‌هایی که او استفاده کرده است توانایی تحمل ۲۵۰ نیوتن وزن را داشته باشند، چرا او امروز در بیمارستان بستری است؟!

(شکل ۱)



(شکل ۲)





مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پروردان جوان
اداره‌ی استعدادهای درخشان استان اصفهان
دستورالعمل استعدادهای درخشان شهید بهشتی کاشان (میانگام) - دوره اول

ریاضی تکمیلی نخبه‌مندان پایه می، هشتم

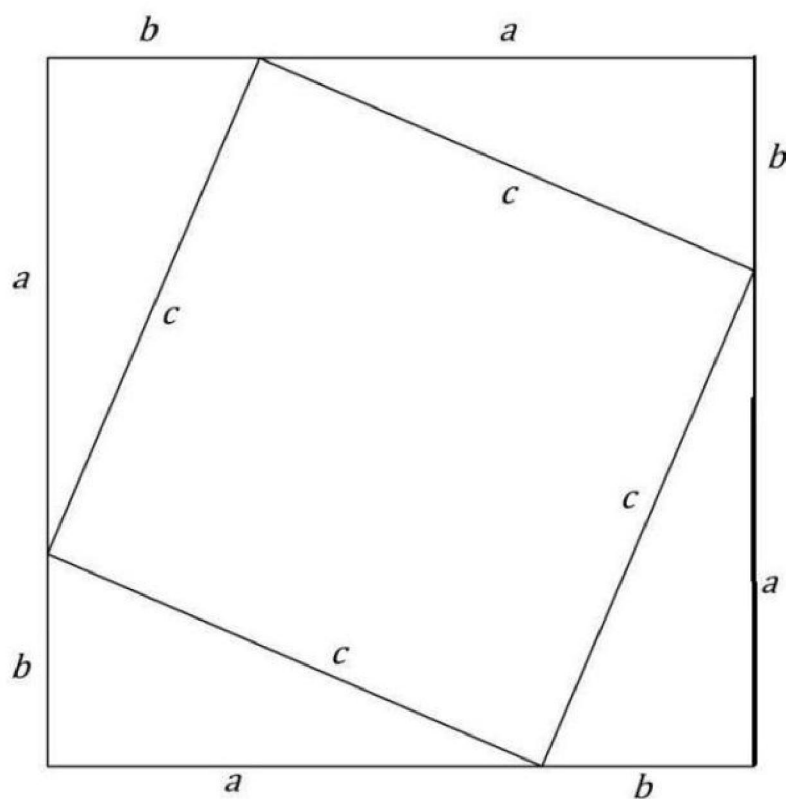
فصل ششم

مثلث



قضیه‌ی فیثاغورس

۱. «فردوس» قضیه‌ی فیثاغورس را خوانده است (در مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر.) و می‌خواهد آن را اثبات کند. او مربعی به ضلع $a+b$ رسم کرده و چهار مثلث قائم‌الزاویه با ساق‌های a و b درون مربع رسم کرده است. روش اثبات او را با جواب دادن به سؤالات زیر بررسی کنید.



(الف) چرا چهار مثلث برابرند؟

(ب) چرا چهارضلعی حاصل از چهار وتر مربع است؟



پ) با توجه به اینکه مساحت مربع بزرگ برابر مجموع مساحت‌های چهار مثلث و مربع کوچک‌تر است مقدار $(a+b)^2$ برابر چه عبارتی است؟

ت) از فصل قبل به خاطر دارید که $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. از این رابطه استفاده کنید و ثابت کنید $c^2 = a^2 + b^2$.

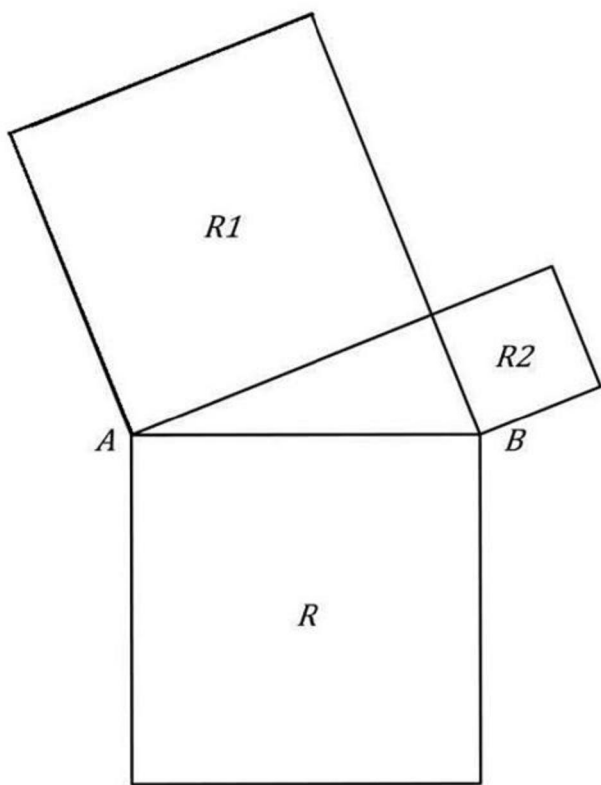
۲. «فرشاد» دوست فردوس، برای آن که در رقابت با دوست خود کم نیاورد، می‌خواهد برعکس قضیه‌ی فیثاغورس را ثابت کند.

اگر مجذور یک ضلع از مثلثی با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن مثلث برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است و زاویه‌ی قائمه‌اش روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است.

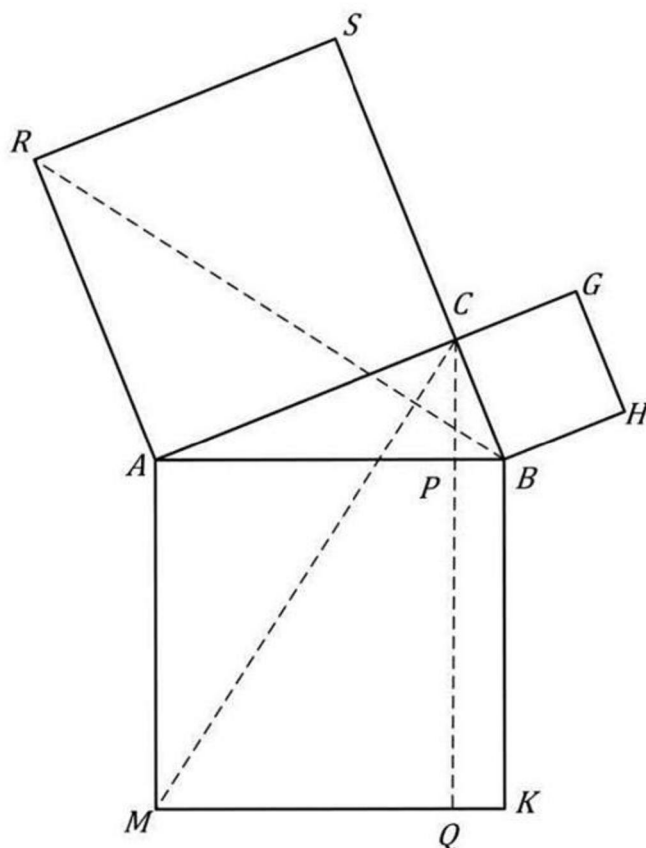
آیا قضیه‌ی جدید هم درست است؟ چرا؟

۳. یونانیان قدیم قضیه‌ی فیثاغورس را به صورت زیر می‌شناختند.

مساحت مربعی که روی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم شود برابر است با مجموع مساحت‌های دو مربعی که روی ساق‌های آن مثلث رسم می‌شوند.

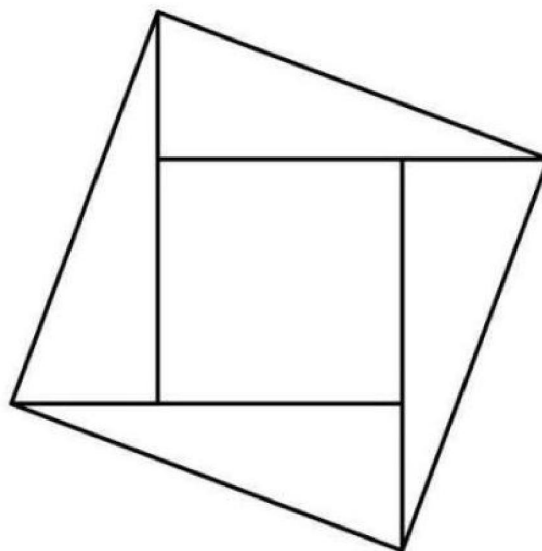
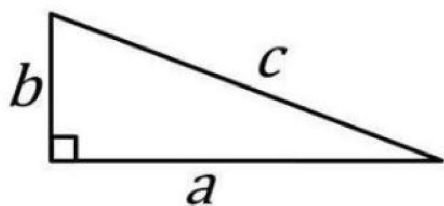


$$S(R) = S(R1) + S(R2)$$



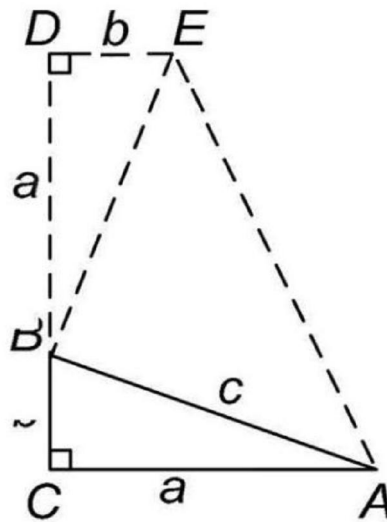
$$S(R) = S(R1) + S(R2)$$

۴. در شکل زیر چهار مثلث قائم الزاویه ی مساوی در کنار یکدیگر شکل زیر را تشکیل داده اند. آیا می توانید از روی شکل اثباتی برای قضیه ی فیثاغورس بیابید.





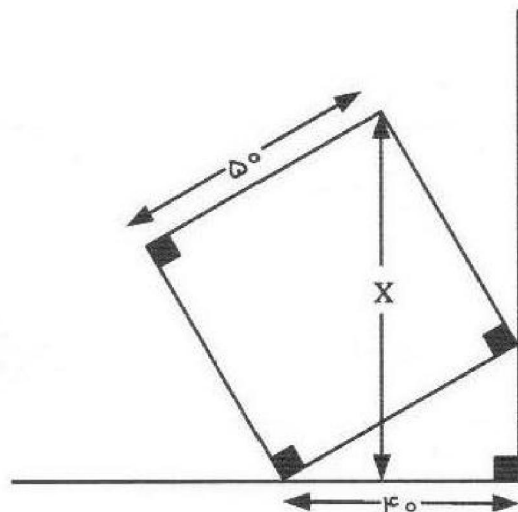
۵. آقای گارفیلد، با استفاده از شکل زیر روشی برای اثبات قضیه فیثاغورس یافت. شما هم با قرار دادن مساحت ذوزنقه با مجموع مساحت های سه مثلث، ثابت کنید که $c^2 = a^2 + b^2$. یادتان باشد که ابتدا قائمه بودن $\angle EAB$ را ثابت کنید.



کاربردهای قضیه فیثاغورس

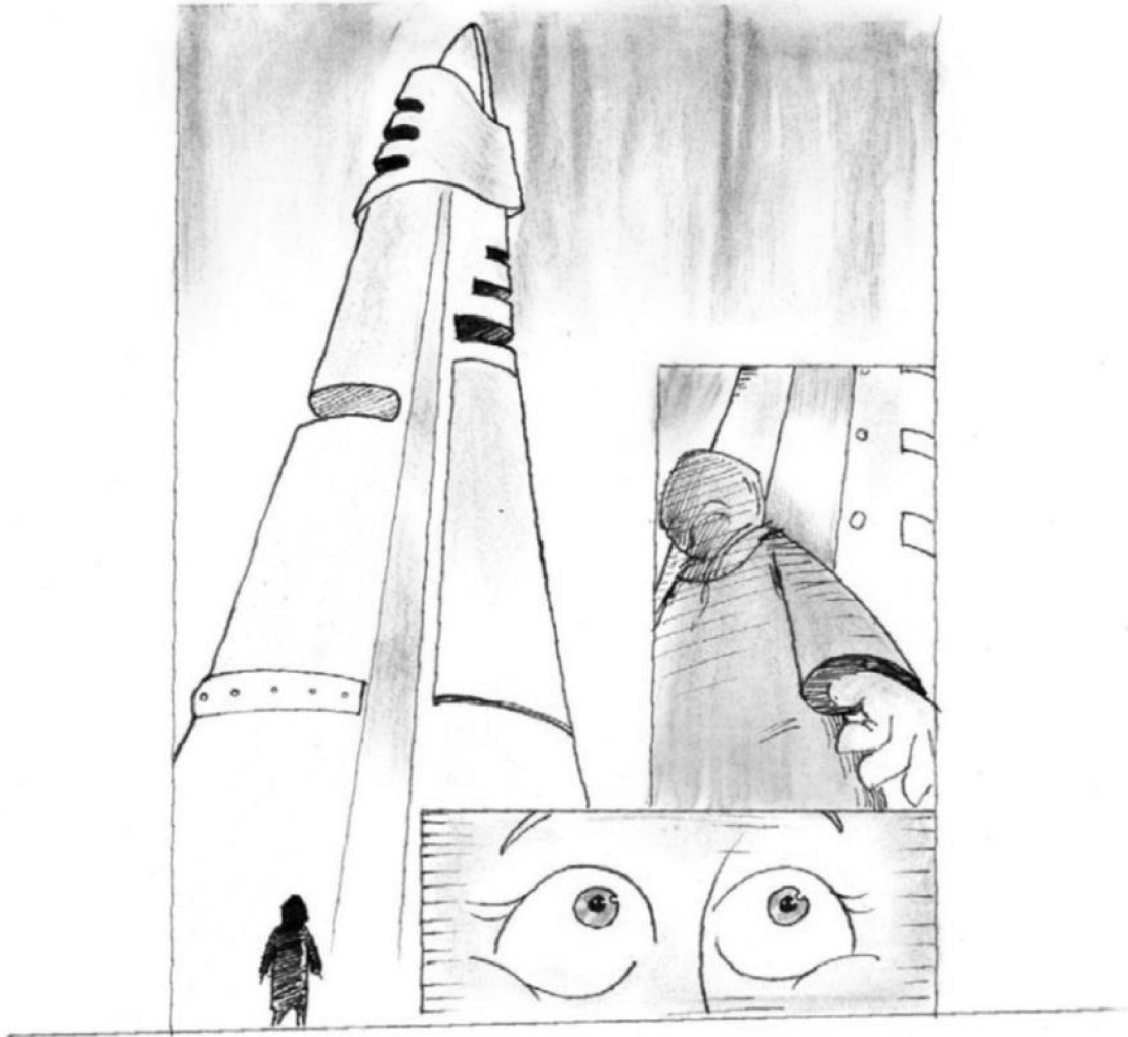
۱. در هر قسمت، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

(الف)





۲. سحر می خواهد ارتفاع برجی را که در آن زندگی می کند را اندازه بگیرد. او ابتدا در فاصله -
ی ۵۰ متری برج به آن نگاه کرد و آن را با زاویه ی ۵۳ درجه دید. سپس از فاصله ی ۱۲۰
متری به آن نگاه کرد و آن را با زاویه ی ۲۷ درجه دید. می دانیم قد سحر، یک و نیم متر
است. به سحر کمک کنید تا ارتفاع برج را به دست آورد؟ روش کار خود را توضیح دهید.





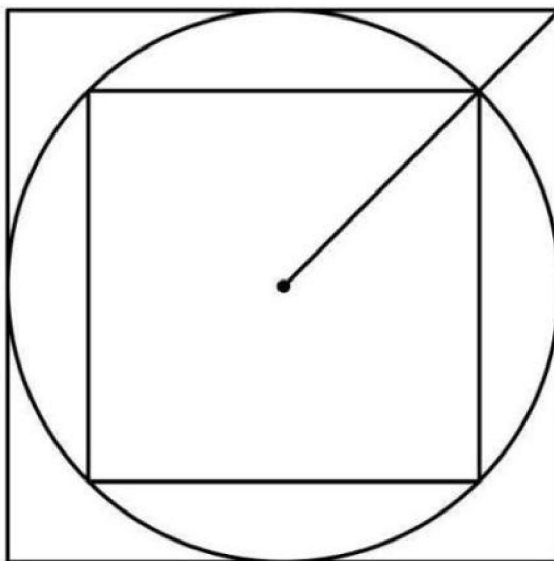
۲. شکور، از خانه‌شان ۲۵ کیلومتر به سمت جنوب، ۶۰ کیلومتر به سمت غرب و ۵۵ کیلومتر به سمت جنوب دور شده است. او اکنون در چه فاصله‌ای از خانه‌شان قرار دارد؟





۳. دو وتر عمود بر هم در یک دایره یکدیگر را قطع کرده اند. اگر طول دو قسمت جدا شده روی یکی از وترها ۳ و ۴ باشد و دو قسمت جدا شده روی وتر دیگر ۲ و ۶ باشد، طول قطر دایره را بدست آورید.

۴. در شکل زیر نسبت مساحت مربع کوچک تر به مساحت مربع بزرگ تر چقدر است؟

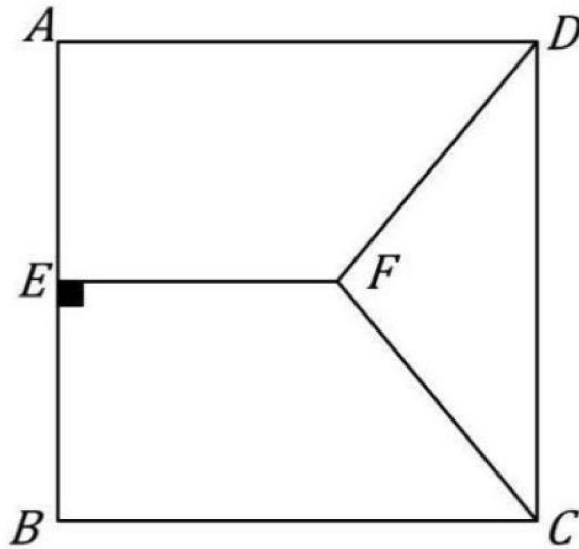


۵. «مشهدی حسن» می خواهد باغی را که در روستا دارد بفروشد و برای پسرش در شهر یک اتوموبیل بخرد. باغ مشهدی حسن، به شکل مثلث و به اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ متر می باشد. اگر در روستا هر مترمربع زمین، یک میلیون تومان ارزش داشته باشد، مشهدی حسن چقدر بابت خرید ماشین می تواند هزینه کند؟



۶. در شکل زیر، طول ضلع مربع $ABCD$ یک واحد است و اضلاع FC ، FB و EF

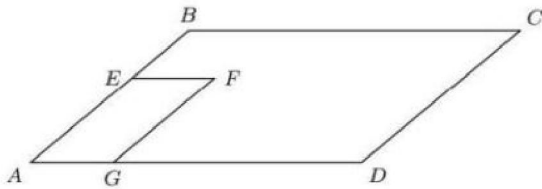
مساویند. مساحت مثلث FBC را بیابید.



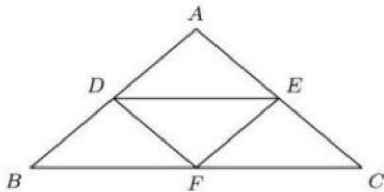


تمرین

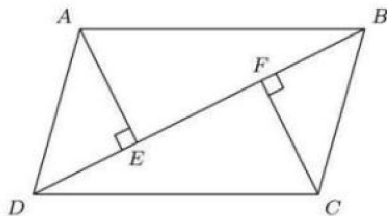
۱. در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ و همچنین چهارضلعی $A EFG$ متوازی‌الاضلاع هستند. زاویه‌های F و B چه رابطه‌ای باهم دارند؟



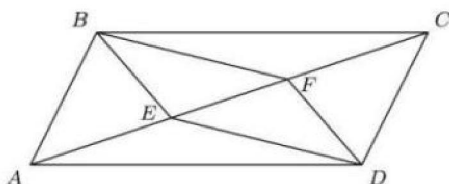
۲. در شکل زیر چهارضلعی $BDEF$ و همچنین چهارضلعی $DECF$ متوازی‌الاضلاع هستند. اگر $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است، $FD = FE$ ثابت کنید.



۳. مطابق شکل، در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، AE و CF را بر BD عمود می‌کنیم. ثابت کنید AE و CF باهم مساوی و موازی هستند.

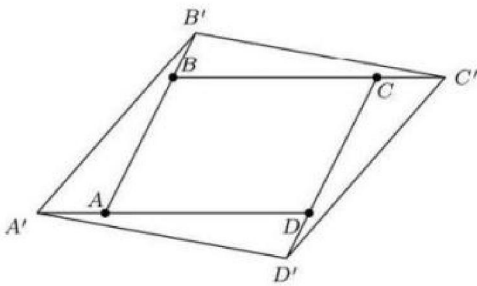


۴. مطابق شکل، در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌دانیم که $AB = AE$ و همچنین $CD = CF$ ؛ ثابت کنید $BEDF$ یک متوازی‌الاضلاع است.

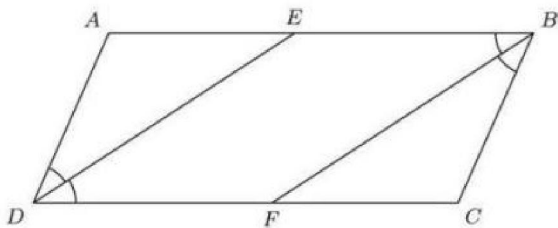




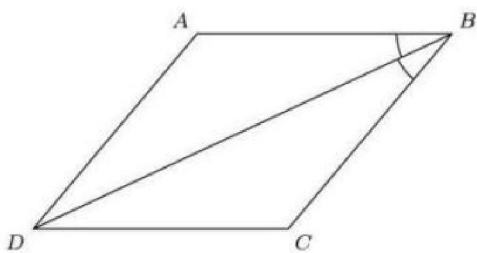
۵. اضلاع متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را در یک جهت امتداد داده و روی آنها پاره‌خط‌های $AA' = BB' = CC' = DD'$ را جدا می‌کنیم؛ ثابت کنید چهارضلعی $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع است.



۶. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، DE نیمساز زاویه D و BF نیمساز زاویه B هستند؛ ثابت کنید چهارضلعی $DEBF$ متوازی‌الاضلاع است.



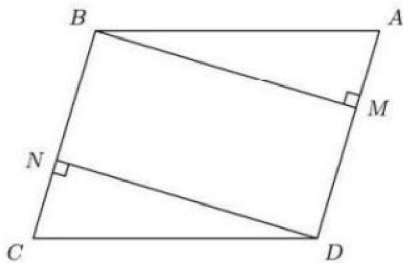
۷. متوازی‌الاضلاعی که یک قطرش نیمساز یکی از زاویه‌هایش باشد، لوزی است.



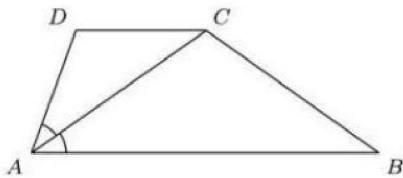


۸. ثابت کنید که قطرهای لوزی، نیمساز نیز هستند.

۹. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ خط BM را عمود بر AD و خط DN را عمود بر BC رسم می‌کنیم؛ ثابت کنید شکل $BMDN$ مستطیل است.



۱۰. در ذوزنقه‌ی $ABCD$ ساق AD با قاعده‌ی CD مساوی است؛ ثابت کنید قطر AC زاویه‌ی A را نصف می‌کند.



۱۱. ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، طول میانه‌ی وارد بر وتر نصف طول وتر است.

۱۲. اگر اندازه‌ی یک زاویه‌ی حاده‌ی مثلث قائم‌الزاویه‌ای 30° باشد، طول ضلع مقابل به این زاویه، نصف طول وتر است.

۱۳. در یک مثلث قائم‌الزاویه که یکی از زاویه‌ها 15° درجه باشد، طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ طول وتر است.



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان
اداره ی استعداد های درخشان استان اصفهان
دبیرستان استعداد های درخشان شهید بهشتی کاشان (سناریان) - دوره اول

ریاضی تکمیلی نینهموشان پایه ی هشتم

فصل هفتم

توان و جذر



تعیین علامت عبارت تواندار

«تعیین علامت» یک عبارت یعنی این‌که، مشخص کنیم حاصل یک عبارت مثبت است یا منفی. برای مثال عبارت زیر را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\frac{(-4) \times (-12) \times (+38)}{(+18) \times (-7) \times (+15)}$$

حاصل عبارت بالا عددی منفی است. زیرا در صورت کسر، دو عدد منفی و یک عدد مثبت در یکدیگر ضرب شده‌اند که حاصل عددی مثبت می‌شود. در مخرج کسر هم دو عدد مثبت در یک عدد منفی ضرب شده‌اند که حاصل منفی می‌شود.

صورت کسر مثبت و مخرج آن منفی است. پس کل کسر منفی می‌شود.

در نتیجه در طرف راست، اعداد بدون علامت نوشته می‌شوند و تنها یک منفی پشت کسر قرار می‌گیرد.

$$\frac{(-4) \times (-12) \times (+38)}{(+18) \times (-7) \times (+15)} = -\frac{4 \times 12 \times 38}{18 \times 7 \times 15}$$

بهرتر است همیشه ابتدا کسر را تعیین علامت کنیم و سپس محاسبات را انجام دهیم.

مثال:

$$\frac{\overset{+}{(-3)^6} \times \overset{-}{(-6)^2}}{\overset{+}{(+16)^3} \times \overset{+}{(-16)^8}} = -\frac{3^6 \times 6^2}{16^3 \times 16^8}$$

نکته بسیار مهم: فقط زمانی می‌توانیم این‌گونه تعیین علامت کنیم که فقط در عبارت ضرب یا تقسیم داشته باشیم.



تمرین

۱. عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $\frac{(+18)^{12} \times (-8)^2}{(-7)^3 \times (+17)^4}$ ب) $\frac{(-2)^3 \times (-3)^2}{(-4)^5 \times (-5)^6}$

ج) $-(-3)^5 \times (-8)^2 \times (+6)^3 \div (-4)^3$

۲. حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $6^3 \times (-6)^5 \times \left(\frac{-12}{2}\right)^3$

۲) $\left(\frac{39}{13}\right)^5 \times \left(\frac{57}{19}\right)^3$

۳) $\left(\frac{2}{5}\right)^{12} \times \left(\frac{8}{20}\right)^{18} \times (0,4)^{14}$

۴) $\left(\frac{-6}{7}\right)^3 \times \left(\frac{6}{7}\right)^5 \times \left(\frac{6}{-7}\right)^7$

۵) $(-12)^6 \div (-12)^4$

۶) $(0,6)^7 \times \left(-\frac{5}{3}\right)^7 \times \left(-\frac{1}{6}\right)^7 \times 6^7$

۷) $\frac{(0,1)^4}{(-4)^4 \div 4^4}$

۸) $(0,7)^6 \times \left(-\frac{5}{4}\right)^6 \times \left(\frac{3}{15}\right)^6 \div \left(\frac{14}{8}\right)^6$

۹) $2^5 \times 3^5 \times 23^5$

۱۰) $(-9)^3 \times \left(-\frac{4}{9}\right)^3 \times \left(\frac{-1}{9}\right)^3$

۱۱) $\frac{(-8)^8}{-8}$

۱۲) $\left(-1\frac{3}{5}\right)^7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^7 \times \left(\frac{5}{6}\right)^7$

۱۳) $\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^{73}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{37}}$

۱۴) $\frac{(-8)^6}{4^6}$

۱۵) $(2,8)^7 \div (0,7)^7 \div 2^7$

۱۶) $\frac{16^{20}}{-4^{20}}$

۱۷) $6^8 \div 5^2 \div 5^4 \div 6^2$

۱۸) $\frac{38^2 \times 26^5 \times 11^7}{13^5 \times 44^7 \times 19^2}$

۱۹) $\left(\frac{1}{3}\right)^7 \times \left(\frac{1}{4}\right)^7 \times \left(\frac{1}{12}\right)^5$

۲۰) $(-7)^4 \times (6)^4 \times (-7)^5 \times (-6)^5$

۲۱) $(-7)^6 \times 7^5 \times (-20)^{11}$

۲۲) $(-12)^6 \times 4^3 \times (-3)^3 \times 10^9$

۲۳) $\frac{18^6 \times 18^9}{3^{15} \times 6^{15}}$

۲۴) $\frac{8^6 \times 8^3 \div 2^9}{\left(\frac{1}{8}\right)^7 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2}$

۲۵) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 3^3$

۲۶) $\frac{2^2 \times 48^7 \times 6^3 \times 3^2 \times 8^5}{16^{12}}$

۲۷) $\frac{(1,4)^2 \times (0,2)^2 \times (7)^2}{(2,8)^5}$

۲۸) $5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3$



۳. الف) اگر طول ضلع مربعی 20° درصد افزایش یابد، مساحت آن چند درصد افزایش می‌یابد؟

ب) اگر طول ضلع مکعبی 20° درصد افزایش یابد، حدس می‌زنید حجمش چند درصد افزایش می‌یابد؟

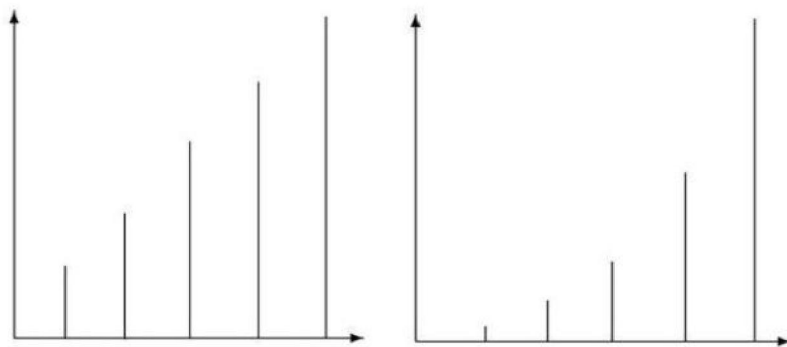
۴. در داخل مربع علامت \times یا \div قرار دهید، تا تساوی برقرار شود.

۱) $6^2 \square 18^3 \square 3^2 = 18^5$

۲) $18^6 \square 2^6 \square 3^6 = 27^6$

۳) $18^5 \square 3^2 \square 9^3 = 9^8$

۵. اعداد $2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ و 2^5 در کدام نمودار درست نشان داده شده‌اند؟



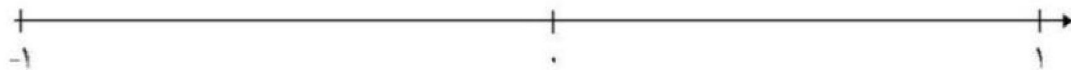


۶. اعداد زیر را روی محور نمایش دهید.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0, \left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4$$



$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0, \left(-\frac{1}{2}\right)^1, \left(-\frac{1}{2}\right)^2, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$



چه نتیجه ای می گیرید؟

۷. بین 2^{100} و 2^{101} شش عدد مثال بزنید که بر ۵ بخش پذیر باشند.

۸. کوچک ترین عدد بین 2^{100} و 2^{101} را بیابید که بر ۵ بخش پذیر باشد.

۹. بزرگ ترین عدد بین 2^{100} و 2^{101} که بر ۵ بخش پذیر است را به دست آورید.



۱۰. مقایسه کنید.

$$2^{63} \square 3^{43}$$

$$2^{33} \square 3^{22}$$

$$9^{15} \square 4^{25}$$

۱۱. می خواهیم اعداد 2^{19} و 16^5 و 64^3 را به ترتیب افزایشی بنویسیم.

$$\begin{array}{ccc} 2^{19} & 16^5 & 64^3 \\ 2^{19} & (2^4)^5 & (2^6)^3 \\ 2^{19} & 2^{20} & 2^{18} \\ 2^{18} & < & 2^{19} < 2^{20} \\ 64^3 & < & 2^{19} < 16^5 \end{array}$$

حال اعداد زیر را به ترتیب افزایشی بنویسید.

$$7^{11}, 8 \times 7^9, 10 \times 7^8, 3 \times 7^{10}$$



۱۱. اعداد زیر را به صورت گاهشی بنویسید.

$$6^{22222}, 3^{33333}, 2^{55555}$$

۱۲. می‌خواهیم کوچک‌ترین عدد طبیعی m را طوری تعیین کنیم که

$$m^{80} > 81^{50}$$

$$m^{80} > 3^{200}$$

$$(m^2)^{40} > (3^5)^{40}$$

$$(m^2)^{40} > (243)^{40}$$

$$\rightarrow m = 16$$

حال کوچک‌ترین عدد طبیعی a را طوری تعیین کنید که

$$a^{72} > 16^{94}$$

۱۳. می‌خواهیم بدون به کار بردن علامت‌های چهارگانه در حساب، با کمک ۴ عدد یک، عددی بنویسیم

که بزرگ‌ترین مقدار ممکن باشد.

به‌طور ذهنی و به‌سادگی می‌توان فهمید که عدد ۱۱۱۱ جواب مورد نظر مسأله نیست. زیرا عدد: 11^{11}



خیلی از آن بزرگتر است. برای محاسبه‌ی این عدد باید ۱۱ را ۱۱ بار در خودش ضرب کرد. این عدد از ۲۸۵ میلیارد تجاوز می‌کند و بنابراین نسبت به عدد ۱۱۱۱ قریب ۲۵۰ میلیون مرتبه بزرگتر است.

حال بدون به کار بردن علامت‌های چهارگانه با کمک ۴ تا عدد ۲ بزرگ‌ترین عدد ممکن را بنویسید.

$$۲۲^۲ = ۲۲^۴ \text{ یادداشت.}$$

۱۴. کدام یک از اعداد زیر از بقیه بزرگتر است؟

$$۳۱۴۳, ۳۱۴۳, ۴۳۱۵, ۳۴۳۱, ۳۴۳۱$$

۱۵. در یک محور عددی فاصله هر دو عدد صحیح متوالی ۱ متر می‌باشد. در این محور فاصله $۲^{۳۱}$ از

قرینه‌اش تقریباً چند کیلومتر است؟



تمرین

۱. مقدار دقیق عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱) $\sqrt{520}$

۲) $\sqrt{\sqrt{400} + \sqrt{16} - \sqrt{64}}$

۳) $\sqrt{15 \times 35 \times 21}$

۴) $\sqrt{40} - \sqrt{16}$

۵) $\sqrt{\frac{64}{49} \times \frac{4}{81}}$

۶) $\sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{71}{72}}$

۷) $\sqrt{\frac{9+16}{36+64}}$

۸) $\sqrt{\frac{32^2 + 30^2 + 16^2 + 15^2 + 5^2}{30}}$

۹) $\sqrt{(-25) \times (-4)}$

۱۰) $\sqrt{\frac{64}{100} \times 0,36}$

۱۱) $\sqrt{0,04 \times 81}$

۱۲) $\sqrt{4 \times 25 \times 9 \times 36}$

۱۳) $\sqrt{\sqrt{625}}$

۱۴) $\sqrt{3^3 \times 2^4 \times 12}$

۱۵) $\sqrt{\frac{0,018}{0,8}}$

۱۶) $\sqrt{5000 \times 0,18}$

۱۷) $\sqrt{0,7 \times 6,3}$

۱۸) $\sqrt{\frac{\sqrt{51,2}}{\sqrt{0,2}} + \frac{\sqrt{486}}{\sqrt{6}}}$

۱۹) $\sqrt{1+2 \times \sqrt{1+3 \times \sqrt{1+4 \times \sqrt{1+5 \times \sqrt{1+6 \times \sqrt{(1+6)^2}}}}}}$

۲. در جای خالی اعداد مناسب قرار دهید.

الف) $3 \times \sqrt{\square} = 21$

ب) $\sqrt{\frac{28}{\square}} = 2$

ج) $3 \times 4 \times \sqrt{\square} = \frac{120}{2}$

د) $\sqrt{1+2 \times \sqrt{\square}} = 3$



۳. برای هر یک از موارد زیر، یک مثال بزنید.

الف) جذر عددی با خود عدد مساوی باشد.

ب) جذر عددی از خود عدد کوچک‌تر باشد.

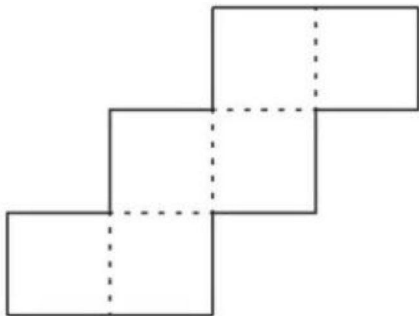
ج) جذر عددی از خود عدد بزرگ‌تر باشد.

۴. مادر مریم برای تولد او، یک کادو خریده که جعبه آن به شکل مکعب است. اگر برای کادو کردن این جعبه،

به $2/16$ متر مربع کاغذ کادو احتیاج باشد، اندازه هر ضلع این جعبه، چند سانتی‌متر است؟

۵. شکل زیر از 6 مربع با مساحت‌های برابر تشکیل شده است. مساحت کل شکل 21600 سانتی‌متر مربع

است.



الف) مساحت یک مربع را پیدا کنید.

ب) طول ضلع یک مربع را پیدا کنید.

ج) محیط تمام شکل را برحسب سانتی‌متر پیدا کنید.

۶. مقدار تقریبی جذرهای زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt{0,27}$

ب) $\sqrt{78}$

ج) $\sqrt{47,3}$

د) $\sqrt{35,5}$

ه) $\sqrt{740}$

و) $\sqrt{0,074}$



۷. الف) مقدار تقریبی $\sqrt{3}$ را به دست آورید.

ب) تلاش کنید جواب دقیق‌تری برای $\sqrt{3}$ به دست آورید.

۸. $2\sqrt{3}$ یعنی $2 \times \sqrt{3}$. مقدار تقریبی عبارت‌های زیر را به دست آورید. سعی کنید جوابتان بهترین جواب ممکن باشد.

الف) $\sqrt{6} \times \sqrt{3}$

ب) $3\sqrt{2}$

ج) $2\sqrt{5} \times \sqrt{99}$

د) $\sqrt{88} \times \sqrt{8} \times \sqrt{8}$

ه) $\sqrt{1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{7}$

۹. اولین رقم بعد از اعشار کدام یک از اعداد زیر بزرگ‌تر است؟

ب) $\sqrt{17}$

الف) $\sqrt{15}$

۱۰. حاصل جذر چند عدد طبیعی بین ۵ و ۹ است؟

۱۱. مجموعه‌ی اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{88}$ را بنویسید.

۱۲. اگر هر یک از حروف نشان‌دهنده‌ی یک رقم باشد، کدام یک از عبارت‌های زیر حتماً غلط است؟

الف) $\sqrt{abcd} = ef$

ب) $\sqrt{abc} = def$

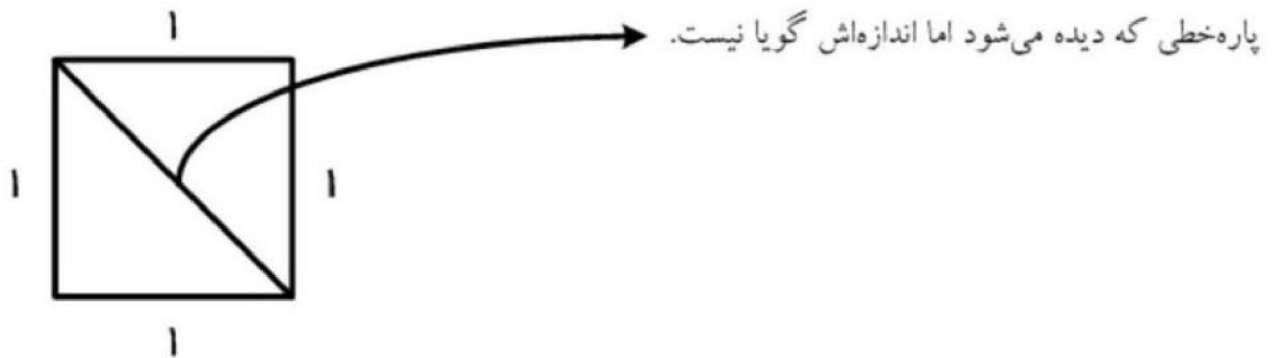
ج) $\sqrt{\circ/ab} = \circ/c$

د) $\sqrt{ab} = c$



اعداد گنگ و گویا

فیثاغورس بسیار به قضیه‌ی خود می‌بالید، زیرا توانسته بود بین هندسه و حساب یک رابطه‌ی اتصال پدید آورد. اما این پیروزی عمر کوتاهی داشت زیرا مثلاً قطر مربعی به ضلع ۱ را نمی‌توانست به صورت عددی گویا بیان کند.



در میان فیثاغورسیان^۱ حیرت زیادی ایجاد شد که پایه‌های فلسفی آن‌ها را به لرزه درآورده بود. آن‌ها به اعدادی به این صورت «آلوگون»^۲ یعنی گنگ یا نگفتنی گفتند و اعضای انجمن فیثاغورسیان، سوگند یاد کردند که تا وجود چنین اعدادی را هرگز فاش نکنند.

پروکلوس^۳ نوشته است: « کسانی که مقادیر اصم یا گنگ را نخستین بار از نهان‌گاه بیرون آوردند و افشا کردند تا آخرین نفر در طوفانی که کشتی آن‌ها را شکست، هلاک شدند. زیرا نگفتنی‌ها باید نگفتنی باقی بماند.»

^۱ افرادی که به اصول باستان اعتقاد نداشتند و به همه چیز به دید «چرا؟» نگاه می‌کردند و بعدها در مدرسه‌ای که فیثاغورس تأسیس کرده بود انجمنی به نام فیثاغورسیان تشکیل دادند.

^۲ Alogon

^۳ Perocelos



تا مدت‌ها $\sqrt{2}$ تنها عدد گنگ شناخته شده بود. بعدها به گفته‌ی افلاطون، تثودوروس کورنه‌یی نشان داد که $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{8}$ ، $\sqrt{10}$ ، $\sqrt{11}$ ، $\sqrt{12}$ ، $\sqrt{14}$ ، $\sqrt{15}$ و $\sqrt{17}$ نیز گنگ هستند.

۱. می‌دانیم که $\sqrt{2}$ عدد گنگ است. کدام دسته از اعداد زیر گنگ هستند؟ چرا؟

الف) $2\sqrt{2}$ ، $3\sqrt{2}$ ، $4\sqrt{2}$ ، ...

ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ، ...

پ) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ، $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ، $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ ، ...

۲. کدام یک از اعداد زیر گنگ هستند؟

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{3}{\sqrt{8}}$ ، $\frac{0}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\sqrt{1+0/44}$

۳. مثلی به اضلاع $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3} + 1$ ، $2\sqrt{2}$ رسم کنید.

۴. سه مثلث به مساحت $\sqrt{6}$ رسم کنید.

۵. الف) بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{7}$ هشت عدد گنگ بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گنگ، ۱۰۰ عدد گنگ یافت.

۶. الف) بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{7}$ هشت عدد گویا بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گنگ، ۱۰۰ عدد گویا یافت.

۷. الف) بین ۲ و ۷ هشت عدد گنگ بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گویا، ۱۰۰ عدد گنگ یافت.



۰۸ الف) بین ۲ و ۷ هشت عدد گویا بنویسید.

ب) راه حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گویا، ۱۰۰ عدد گویا یافت.

۰۹ الف) بین $\sqrt{2}$ و ۷ هشت عدد گویا بنویسید.

ب) راه حلی ارائه کنید که بتوان بین یک عدد گنگ و گویا، ۱۰۰ عدد گویا یافت.

۱۰ الف) بین $\sqrt{2}$ و ۷ هشت عدد گنگ بنویسید.

ب) راه حلی ارائه کنید که بتوان بین یک عدد گنگ و گویا، ۱۰۰ عدد گنگ یافت.

۱۱. زینت می گوید بین هر دو عدد، بی شمار عدد گنگ و گویا وجود دارد. آیا حرف زینت درست است؟ توضیح دهید.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پروران جوان
اداره‌ی استعدادهای درخشان استان اصفهان
دبیرستان استعدادهای درخشان شهید بهشتی کاشان (میتامان) - دوره اول

ریاضی تکمیلی تیزهوشان پایه‌ی هفتم

فصل هشتم

آمار



میانگین

۱. آقای تفنن، یک گله با ۲۰ رأس گاو دارد که میانگین وزن این گاوها ۱۵۰ کیلوگرم می باشد. آقای تفنن برای کمک به ساخت یک مدرسه در روستای خود، ۶ رأس از گاوهای خود را فروخت. اگر میانگین وزن این ۶ گاو ۲۰۰ کیلو بوده باشد، میانگین وزن ۱۴ گاو باقی مانده چقدر است؟
۲. آقای تفکر، پس از محاسبه ی نمرات ریاضی یک کلاس ۲۱ نفری متوجه شد که یک نمره ی ۱۸ را فراموش کرده است وارد لیست نمرات کند. اگر او میانگین را ۱۷ به دست آورده باشد، میانگین درست نمره های کلاس چند است؟
۳. میانگین سن ۱۵ نفر، ۲۵ می باشد. اگر از این گروه مسن ترین و جوان ترین نفرات را حذف کنیم، میانگین ۱۳ نفر باقی مانده چه تغییری خواهد کرد؟
۴. میانگین نمرات ۲۰ نفر ۱۷ می باشد.
الف) حداکثر، نمره ی چند نفر از دانش آموزان می تواند ۱۶ باشد؟
ب) اگر بدانیم که تعداد دانش آموزانی که ۱۶ شده اند با تعداد دانش آموزانی که ۱۵ شده اند برابر است، حداکثر، نمره ی چند نفر ۱۶ شده است؟
۵. نمرات ریاضی چهار کلاس سوم ۱، سوم ۲، سوم ۳ و سوم ۴ را داریم. میانگین نمرات کلاس های سوم ۱ و سوم ۲ برابر ۱۸/۱۲، میانگین نمرات کلاس های سوم ۲ و سوم ۳ برابر ۱۷/۲۴ و میانگین نمرات کلاس های سوم ۳ و سوم ۴ برابر ۱۹/۱۱ است. میانگین نمرات کلاس های سوم ۱ و سوم ۴ چند است؟



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان
اداره ی استعداد های درخشان استان اصفهان
دبیرستان استعداد های درخشان شهید شمس کاشان (سینان) - دوره اول

ریاضی تکمیلی تیزهوشان پایه ی هشتم

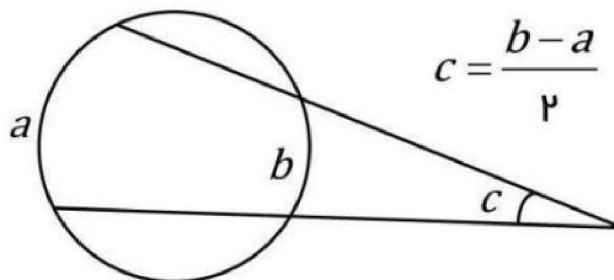
فصل نهم

دایره

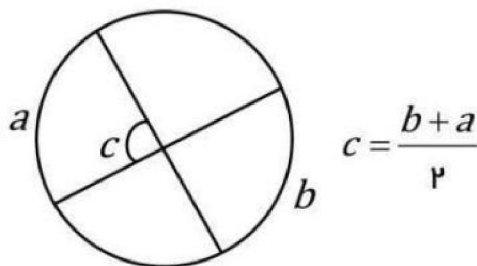


زاویه در دایره

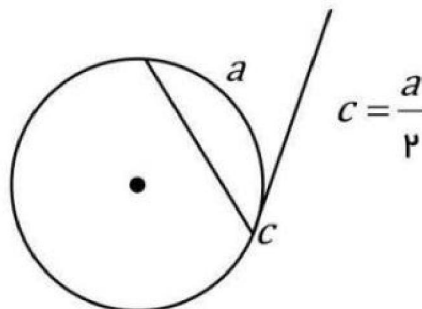
۱. ثابت کنید اندازه ی زاویه ی بیرونی دایره برابرست با نصف اختلاف کمان های روبرو به آن زاویه.



۲. ثابت کنید اندازه ی زاویه ی درونی دایره برابرست با نصف مجموع کمان های روبرو به آن زاویه.



۳. ثابت کنید اندازه ی زاویه ی ظلی^۱ دایره برابرست با نصف کمان روبرو به آن زاویه.



۱. ظل به معنای سایه است.



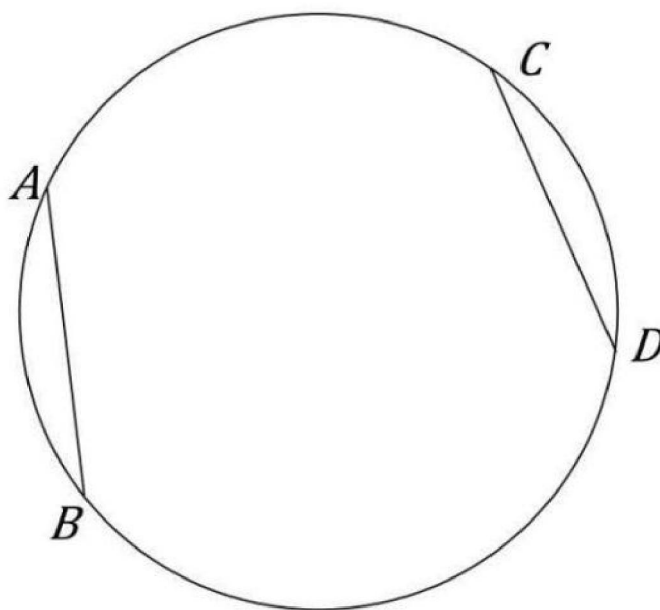
۴. روش سامان برای رسم مماس از نقطه‌ای بر دایره، را به‌خاطر بیاورید. پدر سامان می‌گوید در زمان تحصیلش، معلمشان روش دیگری برای رسم مماس گفته است:

فرض کن می‌خواهیم از نقطه‌ی A بر دایره‌ی C به مرکز O و شعاع r مماسی رسم کنیم. ابتدا پاره‌خط OA را رسم کرده و وسط آن را می‌یابیم (نقطه‌ی M). به مرکز M و به شعاع OM دایره رسم می‌کنیم. از A به نقطه‌ی برخورد دو دایره وصل می‌کنیم. این پاره‌خط همان مماس مورد نظر است.

با استفاده از روشی که پدر سامان بیان کرده است مماسی بر دایره دلخواه رسم کنید.

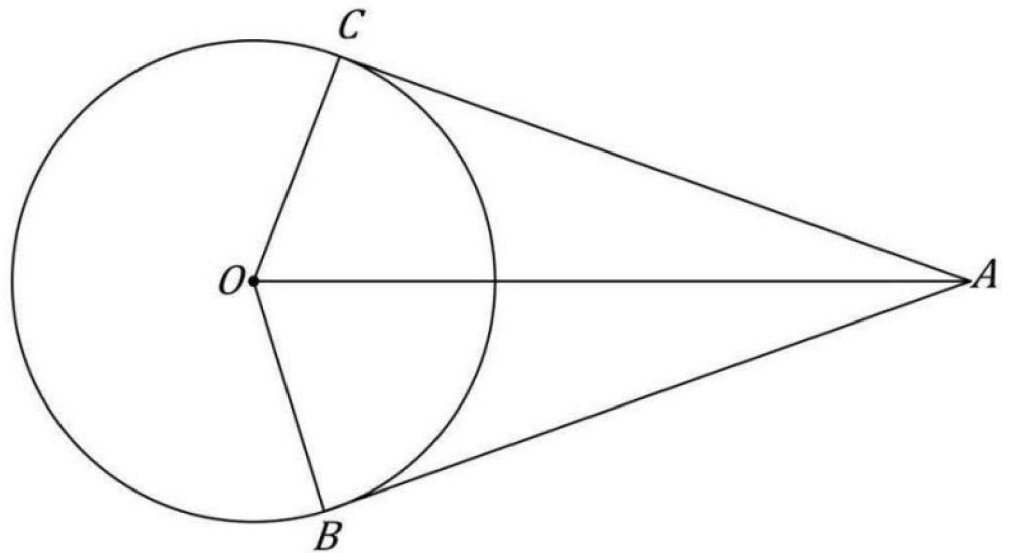
آیا این روش درست است؟ چرا؟

۵. در دایره‌ی زیر $AB = CD$ ، ثابت کنید $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.



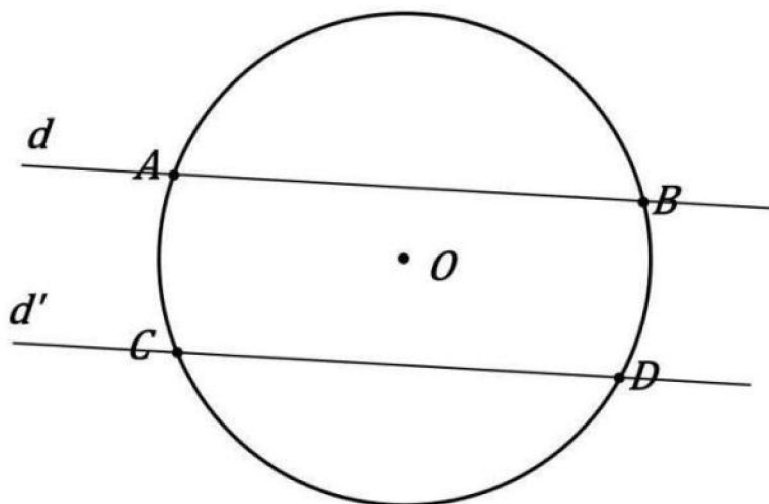


۶. ثابت کنید در دو مماس رسم شده از یک نقطه بر یک دایره با یکدیگر مساوی هستند.



۷. ثابت کنید اگر دو خط موازی یک دایره را قطع کنند، کمان‌های بین این دو خط با هم برابرند.

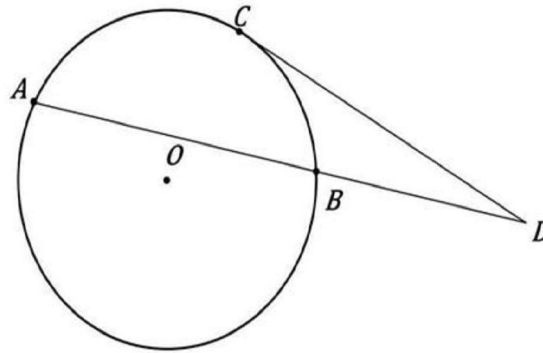
$$d \parallel d' \rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$





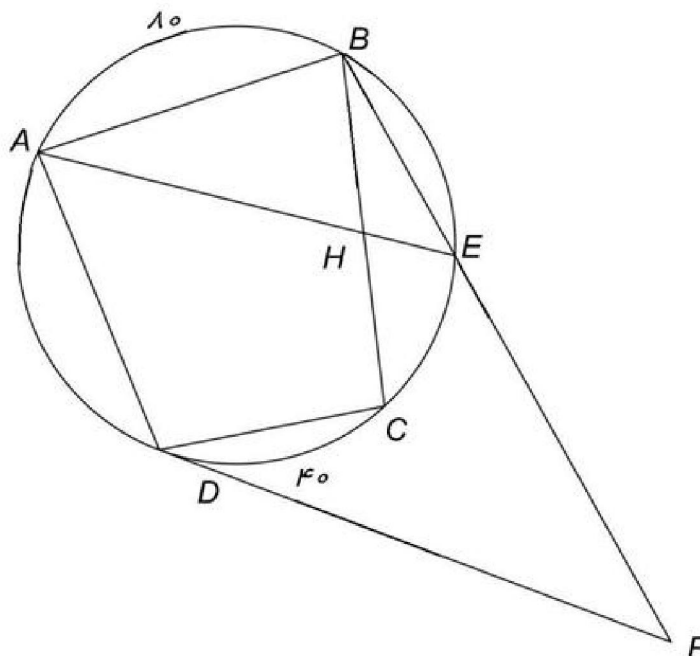
۸. در شکل زیر نشان دهید:

$$\angle D = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BC}}{2}$$



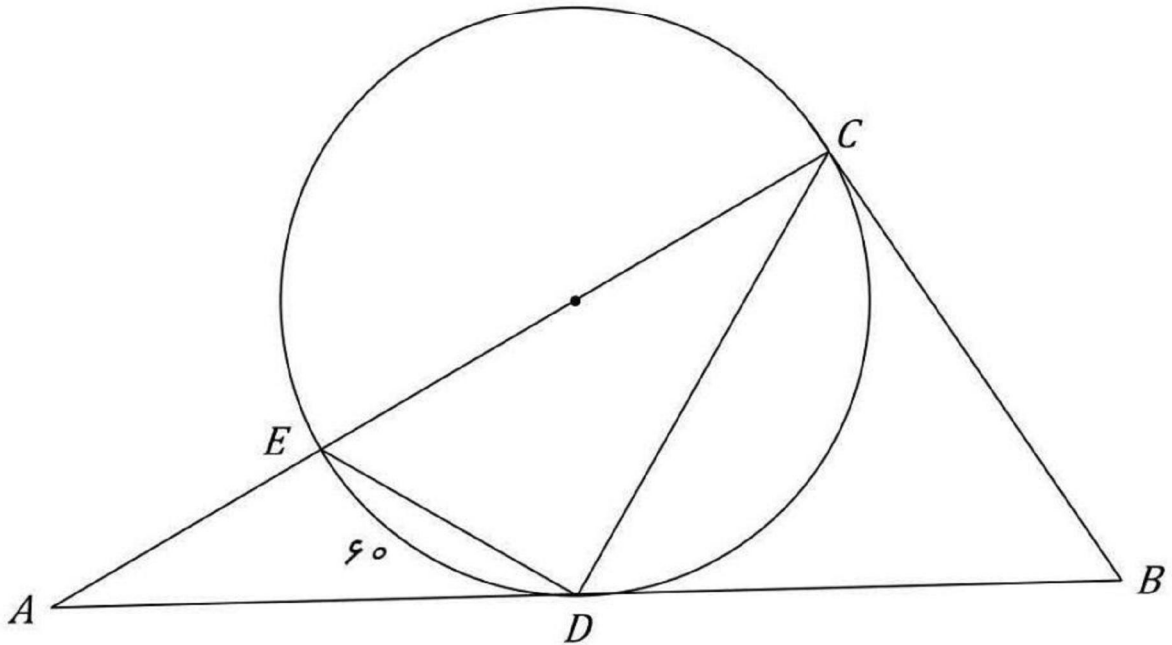
مسائل اثباتی و محاسباتی زاویه در دایره

۹. در شکل زیر FD مماس بر دایره و AB موازی CD و AD موازی BF است. زوایای BAH و BFD ، AHB ، ADF را بیابید.

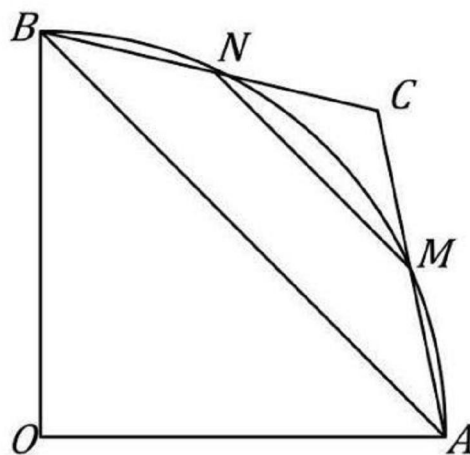




۱۰. در شکل زیر قطر EC دایره است و AD و BC بر دایره مماس هستند. زوایای EAD ، EDC ، ECD و ABC را بیابید.



۱۱. ربع دایره‌ی AOB را در نظر بگیرید. دو وتر مساوی AM و BN را رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در C قطع کنند. ثابت کنید OC بر AB و MN عمود است.

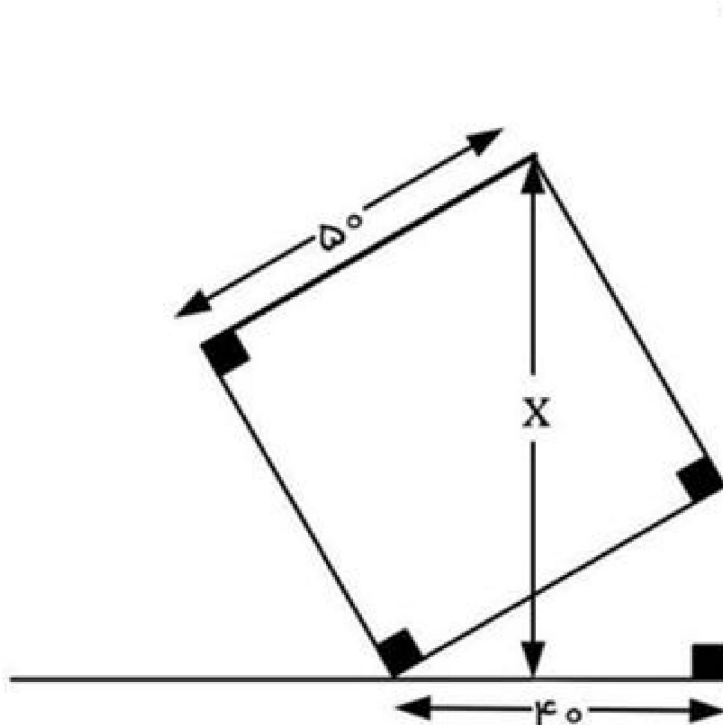




کاربردهای قضیه فیثاغورس

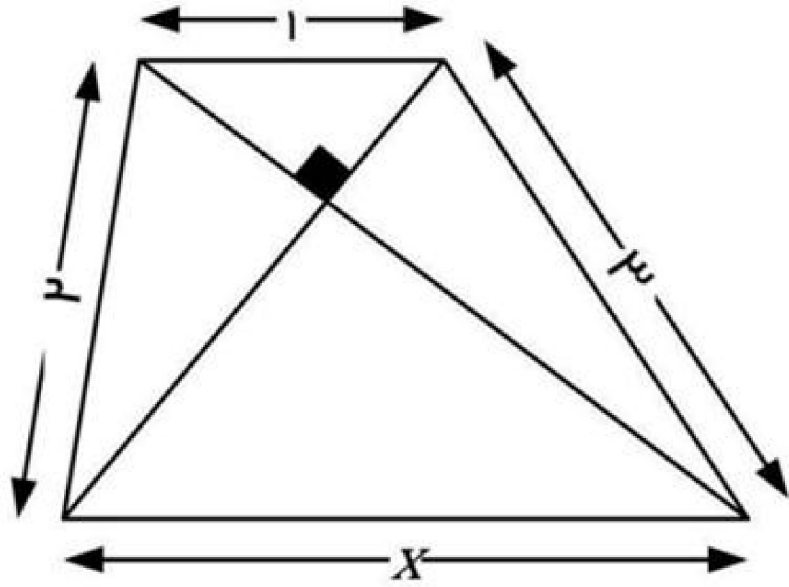
۱. در هر قسمت، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

(الف)

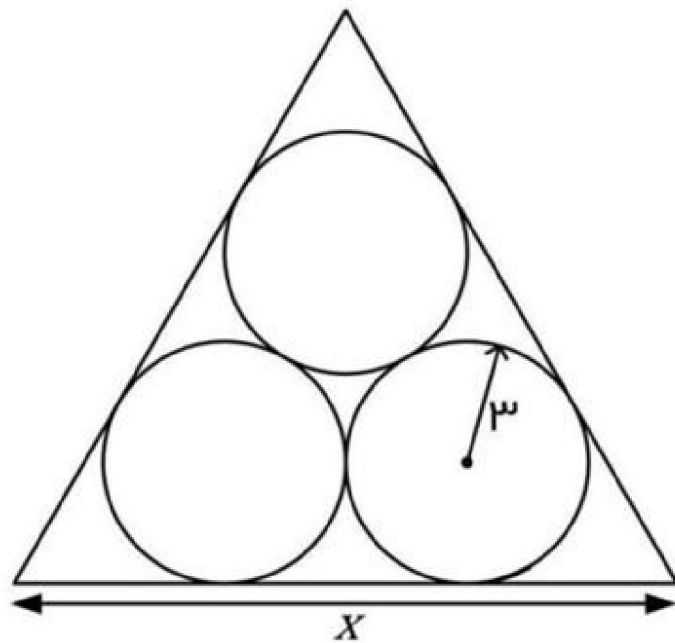




(ب)

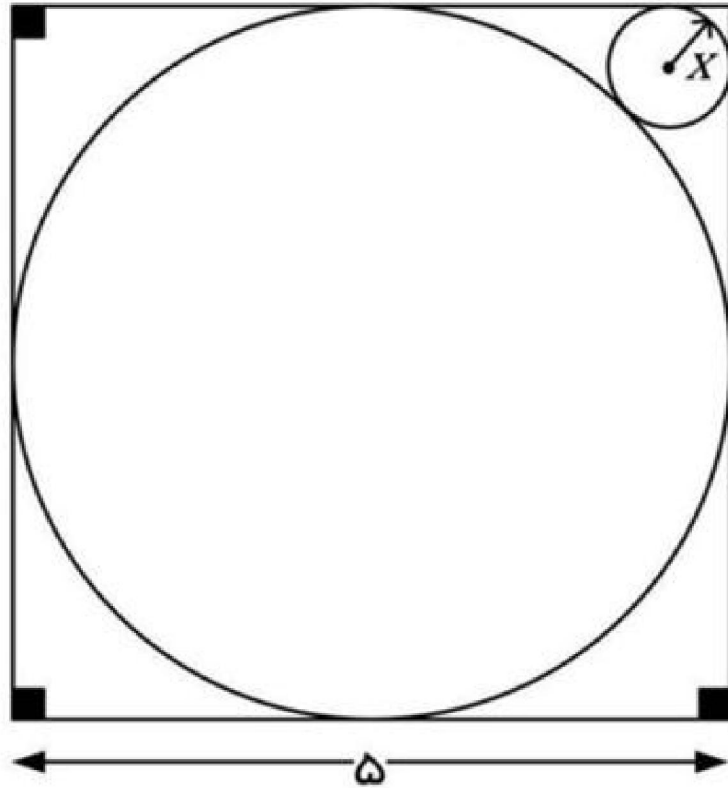


(ب)

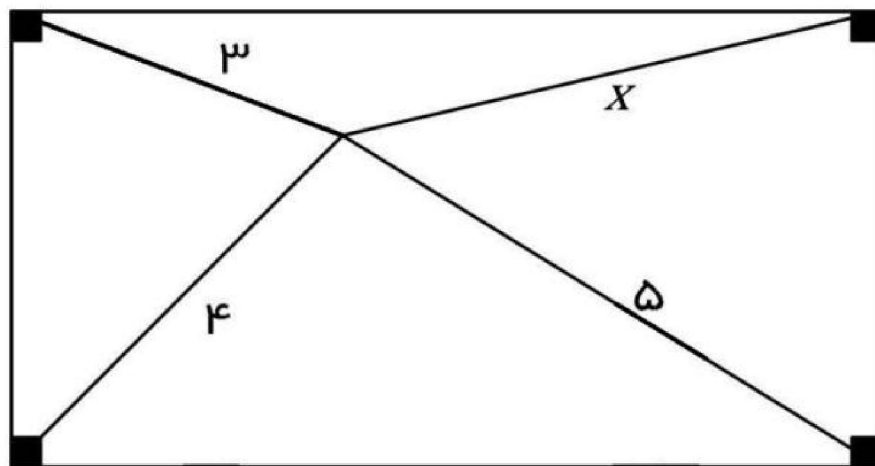




(ت)



(ث)



حضرت آیت الله خامنه‌ای در دیدار با نجفیان و برگزیدگان علمی:

همه‌ی زندگی نجفیان یکی از اقدامات بسیار ضروری و مهم

است؛ زیرا مسیرشناسایی و پرورش استعدادها را مشخص خواهد کرد.

دبیرستان استعدادهای درخشان شهید بهشتی کاشان (سینانیان) - دوره اول